

CAPÍTULO III

Matemática en la Matemática

La Matemática existe desde que existe el ser humano. Prácticamente todo ser humano es un matemático en algún sentido. Desde los que utilizan la Matemática hasta los que la crean. También todos son hasta cierto punto filósofos de la Matemática. Efectivamente, todos los que miden, reconocen personas o cosas, cuentan o dicen que "tan claro como que dos y dos son cuatro" son matemáticos o filósofos de la Matemática. Sin embargo, hay un número muy reducido de personas que se dedican a crear, enseñar, cultivar o divulgar la Matemática.

La Matemática es pilar y cimiento de nuestra civilización. Desde la primera mitad del siglo XIX, debido al progreso en diversas ramas se le dio unidad a la Ciencia Matemática y justificaron el nombre en singular. Según me comentó mi querido amigo, Arrigo Coen, *Mathema* significa erudición, *manthánein* el infinitivo de aprender, el radical *mendh* significa en pasivo, ciencia, saber. Luego, es lo relativo al aprendizaje. Así que en sentido implícito, Matemática significa: "lo digno de ser aprendido". También se dice que Matemática significa "ciencia por excelencia".

Sin embargo, de muy pocas personas podría decirse que poseen información correcta y actualizada sobre alguna de sus ramas o subramas. Los niños y jóvenes de nuestros días pueden poseer una imagen bastante aproximada de electrones, galaxias, agujeros negros, código genético, etc. Sin embargo, difícilmente encontrarán durante sus estudios, conceptos matemáticos creados más allá de la primera mitad del siglo XIX. Esto es debido a la naturaleza de los conceptos de la Matemática.

Es muy común la creencia de que un matemático es una persona que se dedica a realizar enormes sumas de números naturales

durante todos los días. También, la gente supone que un matemático sabe sumar y multiplicar los números naturales muy rápidamente. Si pensamos un poco acerca de este concepto que la mayoría tiene acerca de los matemáticos, podríamos concluir que no se requieren matemáticos ya que una calculadora de bolsillo realiza este trabajo.

También, cuando uno pregunta ¿cuál es la diferencia entre un matemático y un contador? la consideran una pregunta equivalente a ¿cuál es la diferencia entre x y x ? Es decir, que son lo mismo. Si uno dice que un matemático rara vez tiene que realizar sumas o multiplicaciones, les resulta increíble. También les resulta increíble el que los libros de Matemática rara vez utilizan números mayores que 10, exceptuando quizás los números de las páginas.

Durante muchos años, a los niños se les ha hecho énfasis en el aprendizaje de las tablas de multiplicar, en el cálculo de enormes sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas a lápiz pero de números muy pequeños (para los números grandes, la mayoría de las personas tiene poca idea de su magnitud). Después, cuando jóvenes, aquellos que sumaban y multiplicaban polinomios eran considerados por sus compañeros como genios poseedores de un gran talento matemático y posteriormente a éstos, si tenían suerte, se les enseñaba a sumar y multiplicar números complejos.

Pareciera ser, entonces, que el matemático es aquel ser que se pasa la vida haciendo sumas y multiplicaciones (de números pequeños), algo así como un encargado de la caja de un negocio. Esta impresión subsiste en una gran mayoría de las personas. Nada más lejos de esto. Los matemáticos no son los que calculan o hacen cuentas sino los que **inventan cómo calcular o hacer cuentas**. Hacer Matemática es imaginar, crear, razonar.

Para contar fue necesario representar los números de alguna forma, por ejemplo, los dedos de la mano. Después, el ábaco constituyó un paso todavía ligado a contar con los dedos, el cual todavía se

utiliza en algunas partes del planeta. Posteriormente la máquina aritmética de Pascal inventada en 1642 permitía efectuar sumas y restas mediante un sistema muy ingenioso de engranes. En la actualidad, las calculadoras de bolsillo permiten realizar, en segundos, cálculos que antes podrían haber llevado años enteros y también le permitieron a uno deshacerse de las famosas tablas de logaritmos y de la regla de cálculo.

Sin embargo, en general, los alumnos de cualquier carrera y los egresados de ellas a los cuales se les pregunta, -¿qué es la suma? o mejor dicho, ¿qué es la adición?- simplemente encogen los hombros, a pesar de que han pasado más de doce años sumando y de que la suma es un concepto muy primitivo. También suele suceder que cuando un niño o un joven o un adulto profesionalista se enfrenta a un problema, no sabe si debe sumar, restar, multiplicar o llorar.

Recordemos algunos conceptos elementales. Primero, recuerde el conjunto de los números enteros

$$\mathbf{Z} = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

Segundo, pregúntese: -¿cómo se relacionan dos conjuntos "adecuadamente"? Sean **A** y **B** dos conjuntos cualesquiera. Si a cada elemento de **A** le asociamos un elemento único de **B**, diremos que **f: A → B** es una *función* de **A** en **B**.

Por ejemplo, si **A** = {**a**, **b**, **c**} y **B** = {**p**, **q**, **r**, **s**} entonces **f: A → B** dada por la siguiente asociación

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\rightarrow \mathbf{p} \\ \mathbf{b} &\rightarrow \mathbf{q} \\ \mathbf{c} &\rightarrow \mathbf{r} \end{aligned}$$

es una función, mientras que la asociación

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{p}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\rightarrow \mathbf{q} \\ \mathbf{b} &\rightarrow \mathbf{q} \\ \mathbf{c} &\rightarrow \mathbf{r} \end{aligned}$$

no es una función, puesto que a un objeto de \mathbf{A} no se le asocia un único elemento de \mathbf{B} , (a \mathbf{a} se le asocian \mathbf{p} y \mathbf{q}). Los conjuntos \mathbf{A} y \mathbf{B} se llaman *dominio* y *codominio*, respectivamente, de la función \mathbf{f} .

El subconjunto del codominio que consiste de los elementos que son asociados a los del dominio se llama *imagen* de \mathbf{f} . Así, en la función anterior, la imagen de \mathbf{f} es el conjunto $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$; el elemento \mathbf{s} de \mathbf{B} no está en la de \mathbf{f} .

Utilizamos la siguiente notación para denotar las imágenes de los elementos de \mathbf{A} bajo \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}: \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{a} &\rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \\ \mathbf{b} &\rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{q} \\ \mathbf{c} &\rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{r} \end{aligned}$$

Tercero: considere el producto cartesiano de un conjunto \mathbf{A} que se denota $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ y que consiste de todas las parejas ordenadas de elementos de \mathbf{A} , es decir

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}\}$$

Ahora ya podemos definir el importantísimo concepto de operación binaria o ley de composición. Sea \mathbf{G} un conjunto no vacío. Una *operación binaria* o *ley de composición* en \mathbf{G} es una función $\mathbf{f}: \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ donde $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Como es obvio, podemos denotar una función con cualquier símbolo, por ejemplo \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{h} , \blacklozenge , \diamond , \clubsuit , \otimes , \bullet , \times , $*$, etc. Así, en \mathbf{Z} tenemos una operación binaria

$$\begin{aligned} f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{Z} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

y por abuso o conveniencia de notación denotamos $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como $\mathbf{x}f\mathbf{y}$. Por ejemplo,

$$(3, 2) \rightarrow f(3, 2) = 3f2.$$

Si la operación binaria f la denotamos simplemente como $+$ (la suma usual en \mathbf{Z}) entonces $(3, 2) \rightarrow +(3, 2) = 3+2$ que es igual a 5 . Si la operación binaria f la denotamos como \cdot (la multiplicación usual en \mathbf{Z}), entonces $(3, 2) \rightarrow \cdot(3, 2) = 3 \cdot 2$ que es igual a 6 .

Observe que una operación binaria se define en un conjunto no vacío \mathbf{G} . A continuación definamos un conjunto de la siguiente manera: considere tres cajas y reparta los números enteros en cada una de ellas de una manera ordenada como sigue:

.	.	.
.	.	.
.	.	.
-6	-5	-4
-3	-2	-1
0	1	2
3	4	5
6	7	8
.	.	.
.	.	.
.	.	.
[0]	[1]	[2]

Las cajas las llamaremos: $[0]$ por contener al cero, $[1]$ por contener al uno y caja $[2]$ por contener al dos. Asignémosle a la caja $[0]$ el

número **0**, porque sus elementos dan residuo **0** al dividirlos entre **3**; análogamente asignémosle a la caja **[1]** el número **1** y a la caja **[2]** el número **2**, pues sus elementos dan residuo **1** y **2** respectivamente, al dividirlos entre **3**.

Consideremos el conjunto $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ llamado *juego completo de residuos módulo 3*, pues al dividir cualquier entero entre **3** da residuos **0**, **1** ó **2**. Definamos en él una operación binaria que podríamos denotar con **f**, **g**, **h**, \diamond , \diamondsuit , \clubsuit , \otimes , **+**, \bullet , \times , $*$, etc; escojamos **+**,

$$+: Z_3 \times Z_3 \rightarrow Z_3$$

Así:

$$\begin{aligned} (1,1) &\rightarrow +(1,1) = 1+1 = 2 \\ (0,1) &\rightarrow +(0,1) = 0+1 = 1 \\ (1,0) &\rightarrow +(1,0) = 1+0 = 1 \\ (2,1) &\rightarrow +(2,1) = 2+1 = 0 \\ (2,2) &\rightarrow +(2,2) = 2+2 = 1 \end{aligned}$$

Escribamos su tabla de sumar:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Veamos otro ejemplo: consideremos el *juego completo de residuos módulo 5*, es decir, los posibles residuos que se obtienen al dividir cualquier número entero entre **5**, el cual denotaremos con $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dibuje usted las cajas. Definamos una operación binaria en Z_5

$$\cdot : \mathbf{Z}_5 \times \mathbf{Z}_5 \rightarrow \mathbf{Z}_5$$

de la manera usual conveniente y en particular tenemos:

$$(2,2) \rightarrow \cdot (2,2) = 2 \cdot 2 = 4$$

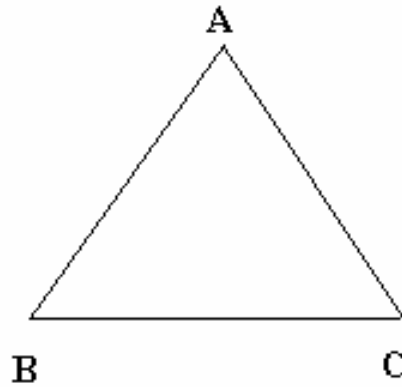
$$(2,1) \rightarrow \cdot (2,1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$(2,3) \rightarrow \cdot (2,3) = 2 \cdot 3 = 1$$

$$(3,4) \rightarrow \cdot (3,4) = 3 \cdot 4 = 2$$

Es común oír el dicho "tan cierto como que dos y dos son cuatro". Sin embargo, como hemos visto $2+2 = 1$, $2+1 = 0$, $2 \cdot 3 = 1$, $3 \cdot 4 = 2$, etc. y claramente $2+2 \neq 4$. En los ejemplos anteriores hemos considerado los conjuntos \mathbf{Z}_3 y \mathbf{Z}_5 a los cuales le hemos definido una "suma" u operación binaria. La suma usual en los números naturales y enteros es una operación binaria, lo mismo que la multiplicación definida en ellos. Estas son las operaciones binarias consideradas en el dicho. En los primeros años de escuela se pone un énfasis especial en uno de los muchos algoritmos para sumar y multiplicar números naturales (i.e. en el procedimiento o manera de sumarlos y multiplicarlos). Después de varios años se pone un especial énfasis en sumar y multiplicar números enteros y en multiplicar y dividir polinomios. En general, cuando se "suma" hay que especificar siempre el conjunto en el cual se define la operación binaria.

También es común oír el dicho "el orden de los factores no altera el producto". ¿Será esto siempre cierto? Consideremos el conjunto Δ_3 de los movimientos rígidos de un triángulo equilátero con vértices **A**, **B** y **C**.



Estos movimientos rígidos son de dos tipos: las rotaciones sobre el baricentro de 0° , 120° y 240° y las reflexiones sobre las medianas. Denotemos éstos movimientos rígidos de la siguiente manera:

$$0 = [A B C / A B C] \quad 1 = [A B C / B C A] \quad 2 = [A B C / C A B]$$

$$3 = [A B C / A C B] \quad 4 = [A B C / C B A] \quad 5 = [A B C / B A C]$$

Los elementos 0 , 1 y 2 corresponden a las rotaciones. Los elementos 3 , 4 y 5 corresponden a las reflexiones. Definamos una operación binaria \bullet en Δ_3 :

$$\begin{aligned} \bullet: \Delta_3 \times \Delta_3 &\rightarrow \Delta_3 \\ (x,y) &\rightarrow \bullet(x,y)=x\bullet y \end{aligned}$$

Calculemos:

$$[A B C / B C A] \bullet [A B C / B C A] = [A B C / C A B]$$

esto es

$$(1,1) \rightarrow \bullet(1,1) = 1 \bullet 1 = 2.$$

$$[A B C / C A B] \bullet [A B C / A C B] = [A B C / B A C]$$

esto es

$$(2,3) \rightarrow \bullet(2,3) = 2 \bullet 3 = 5.$$

$$[A B C / A C B] \bullet [A B C / C A B] = [A B C / C B A]$$

esto es

$$(3,2) \rightarrow \bullet(3,2) = 3 \bullet 2 = 4.$$

Observe que $2 \bullet 3 \neq 3 \bullet 2$.

Ahora sí, ¿ $2+2 = 4$ y $2 \bullet 3 = 3 \bullet 2$?

El concepto de operación binaria o ley de composición es uno de los más antiguos de la Matemática y se remonta a los antiguos egipcios y babilonios quienes ya poseían métodos para calcular sumas y multiplicaciones de números naturales positivos y de números racionales positivos (téngase en cuenta que no poseían el sistema de numeración que nosotros usamos). Sin embargo, al paso del tiempo, **los matemáticos se dieron cuenta que lo importante no eran las tablas de sumar o multiplicar de ciertos "números" sino el conjunto y su operación binaria definida en él.** Esto, junto con ciertas propiedades que satisfacían dieron lugar al concepto fundamental llamado *grupo*. Así es que, un grupo es un conjunto no vacío G junto con una operación binaria $\diamond: G \times G \rightarrow G$, denotado (G, \diamond) la cual cumple con ser asociativa, poseer elemento de identidad e inversos. Es fácil comprobar que los conjuntos Z_3 , Z_5 y Δ_3 con su operación binaria respectiva poseen

la estructura de grupo. Como se puede ver en el caso de (Δ_3, \bullet) el concepto de grupo está estrechamente ligado con el concepto de simetría. Los ejemplos anteriores muestran algunos objetos que poseen una estructura de grupo y lo variantes que pueden ser éstos.

Históricamente, el concepto de operación binaria o ley de composición fue extendido de dos maneras donde solamente se tiene una semejanza con los casos numéricos de los babilonios y los egipcios. La primera fue por Gauss, al estudiar formas cuadráticas con coeficientes enteros, donde vio que la ley de composición era compatible con ciertas clases de equivalencia. La segunda culminó con el concepto de grupo en la Teoría de Sustituciones, (mediante el desarrollo de las ideas de Lagrange, Vandermonde y Gauss en la solución de ecuaciones algebraicas). Sin embargo, estas ideas permanecieron superficiales, siendo Galois el verdadero iniciador de la Teoría de Grupos al reducir el estudio de las ecuaciones algebraicas al de grupos de permutaciones asociados a ellas.

Fueron los matemáticos ingleses de la primera mitad del siglo XIX los que aislaron el concepto de ley de composición y ampliaron el campo del Álgebra aplicándola a la Lógica (Boole), a vectores y cuaternios (Hamilton), y a matrices (Cayley). Para finales del siglo XIX, el Álgebra se orientó al estudio de las estructuras algebraicas dejando atrás el interés por las aplicaciones de las soluciones de ecuaciones numéricas. Ésta orientación dio lugar a tres principales corrientes:

- (i) la Teoría de Números que surgió de los matemáticos alemanes Dirichlet, Kummer, Kronecker, Dedekind y Hilbert, basados en los estudios de Gauss. El concepto de campo fue fundamental.
- (ii) la creación del Álgebra Lineal en Inglaterra por Sylvester, Clifford; en Estados Unidos por Pierce, Dickson, Wedderburn; y en Alemania y Francia por Weirstrass, Dedekind, Frobenius, Molien, Laguerre, Cartan.

(iii) la Teoría de Grupos que al principio se concentró en el estudio de grupos de permutaciones. Fue Jordan quien desarrolló en gran forma el trabajo de Galois, Serret y otros de sus predecesores. Él introdujo el concepto de homomorfismo y fue el primero en estudiar grupos infinitos. Más tarde, Lie, Klein y Poincaré desarrollaron este estudio considerablemente. Finalmente se hizo patente que la idea fundamental y esencial de grupo era su ley de composición u operación binaria y no la naturaleza de sus objetos.

El éxito de la Teoría de Grupos es impresionante y extraordinario. Basta nombrar su influencia en casi toda la Matemática y otras disciplinas del conocimiento. Los ejemplos escritos anteriormente podrían dejar perplejo al no ilustrado en matemática con un pensamiento acerca de los pasatiempos que los matemáticos inventan combinando “números” de una manera perversa. Sin embargo, hemos considerado ejemplos vitales para la Teoría de los Números (se podría reemplazar el número **3** por cualquier número natural **n** (si **n=12** obtenemos los números de los relojes) o por un número primo **p** obteniendo conceptos y resultados importantes) y para la propia Teoría de Grupos (grupo diédrico y simétrico). Al observar esto, lo que realmente se ha hecho en la Teoría de Grupos, es extraer lo esencial de ellos, a saber, dado un conjunto no vacío, definimos una operación binaria en él, tal que cumpla ciertas axiomas, postulados o propiedades, es decir, que posea una *estructura*, (la estructura de grupo). Existen varios conceptos ligados al de estructura, uno de los más importantes es el de *isomorfismo*. Véase el problema 6 para un ejemplo de isomorfismo.

El concepto de estructura y de los relacionados con éste como el de isomorfismo, juegan un papel decisivo en la Matemática actual. Las teorías generales de las estructuras importantes son herramientas muy poderosas. Siempre que alguien pruebe que sus objetos de estudio satisfacen los axiomas de cierta estructura, obtiene, de inmediato, todos los resultados válidos para esa teoría

en sus objetos. Ya no tiene que comprobar cada uno de ellos particularmente. Un uso actual en la Matemática, de las estructuras y los isomorfismos, es el de clasificar las diversas ramas de ella (no es importante la naturaleza de los objetos pero sí lo es el de sus relaciones).

En la Edad Media la clasificación en ramas de la Matemática estaba dada por la de Aritmética, Música, Geometría y Astronomía las que constituyeron el *Cuadrivium*. Después y hasta la mitad del siglo XIX, las ramas de la Matemática se distinguían por los objetos que estudiaban, por ejemplo, Aritmética, Álgebra, Geometría Analítica, Análisis, todas con algunas subdivisiones. Algo así como si dijéramos que puesto que los murciélagos y las águilas vuelan entonces pertenecen a las aves. Lo que se nos presenta ahora es el ver más allá y extraer de las apariencias las estructuras subyacentes. Actualmente existen 63 ramas de la Matemática con más de 5000 subclasificaciones. Entre ellas se encuentran la Topología Algebraica (estructuras mixtas), el Álgebra Homológica (la purificación de la interacción entre el Álgebra y la Topología, creada en los años cincuenta), y la K-Teoría Algebraica (una de las más recientes ramas, creada en los años setenta).

Algunos piensan que la Matemática es un juego simple que sola y fríamente interesa al intelecto. Esto sería el olvidar, asienta Poincaré, la sensación de la belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, así como de la elegancia geométrica. Esta es ciertamente una sensación de placer estético que todo verdadero matemático ha sentido y por supuesto que pertenece al campo de la emoción sensible. La belleza y la elegancia matemática consisten de todos los elementos dispuestos armónicamente tales que nuestra mente pueda abarcarlos totalmente sin esfuerzo y a la vez mantener sus detalles. Esta armonía, continúa Poincaré, es, de inmediato, una satisfacción de nuestras necesidades estéticas y una ayuda para la mente que sostiene y guía. Y al mismo tiempo, al poner bajo nuestra visión un todo bien ordenado, nos hace entrever una ley o verdad

matemática. Esta es la sensibilidad estética que juega un papel de filtro delicado, la cual explica suficientemente el porqué el que carece de ella nunca será un verdadero creador, concluye Poincaré.

La Matemática es una de las Bellas Artes, la más pura de ellas, que tiene el don de ser la más precisa y la precisión de las Ciencias.

Para finalizar, invitamos al lector a resolver los siguientes problemas:

*Haga una tabla de multiplicar para \mathbf{Z}_3 .

*Construya una tabla de sumar para \mathbf{Z}_5 .

*Construya la tabla de multiplicar en \mathbf{Z}_5 .

*Sea Σ_3 el conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$. Calcule el número de elementos de Σ_3 . Defina una operación binaria en Σ_3 y construya su tabla.

*Sea Σ_n el conjunto de las permutaciones de un conjunto con n elementos. Calcule el número de elementos de Σ_n .

*Construya la tabla de sumar de \mathbf{Z}_6 y compárela con las de Σ_3 y Δ_3 . Observe que las tablas de Σ_3 y Δ_3 son la misma salvo por el orden y el nombre de los elementos. Compruebe que éstos dos últimos son grupos y establezca un isomorfismo entre ellos. Observe que la tabla de \mathbf{Z}_6 le permite comprobar que es un grupo pero su tabla es totalmente diferente a las otras dos.

Los conceptos implícitos en este capítulo son: conjuntos, funciones, producto cartesiano, operación binaria, clases de equivalencia, axiomas de Peano, ordenaciones con repetición, sucesiones, algoritmo de la división, enteros módulo n , grupos, subgrupo $n\mathbf{Z}$, grupo cociente, isomorfismo $\mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, grupo diédrico y grupo simétrico. Estos le servirán al lector para consultar la bibliografía.

