SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

CARTA INFORMATIVA

Junio 2002

XXXV CONGRESO NACIONAL

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Universidad Juárez del Estado de Durango

¿Conocemos al "conjunto potencia"?

¡Y sin embargo, se mueve!

¿Conocemos al “conjunto potencia”?

Sergio Macías
Instituto de Matemáticas, UNAM,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria,
México, D.F., C.P. 04510, México.
Correo electrónico: macias@servidor.unam.mx

Cuando empezamos a estudiar matemáticas, una de las primeras cosas que nos enseñan es que dado un conjunto X, uno puede construir un conjunto nuevo, llamado el *conjunto potencia* de X, como sigue:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$$

Observemos que hay una “copia” de X dentro de $\mathcal{P}(X)$, ésta es:

$$\mathcal{F}_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Cuando el conjunto X es finito, podemos dar la lista de los elementos de $\mathcal{P}(X)$. Por ejemplo:

(a) Si $X = \{1, 2\}$ entonces

$$\mathcal{P}(X)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1, 2\}\}.$$

(b) Si $X = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(X) = \{\{1\}, \{2\},\{3\},\{1, 2\},\{1, 3\},\{2, 3\},\{1, 2, 3\}\}.$$

Ahora, ¿qué podemos hacer cuando el conjunto X no sea finito?

(I) ¿Podemos encontrar un “modelo” para $\mathcal{P}(X)$?, esto es, ¿podemos encontrar un “conjunto conocido” Y y una función biyectiva $f : \mathcal{P}(X) \to Y$, con las propiedades apropiadas? (Las propiedades a las que nos referimos dependen de qué área de las matemáticas se utilice para atacar el problema. En nuestro caso pedimos que las biyecciones sean homeomorfismos.)

El encontrar un “modelo” para el conjunto potencia nos permitiría entenderlo mejor pues obtendríamos una “visión geométrica” del mismo.

Es muy probable que no podamos responder a la interrogante (I). Entonces, uno se pregunta algo más sencillo:

(II) ¿Podemos encontrar un “modelo” para algunos subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$?

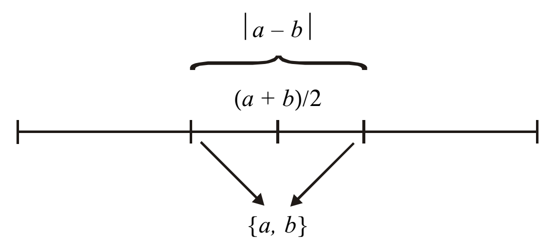
Por lo que mencionamos anteriormente, X es un modelo para $\mathcal{F}_1(X)$, ya que la función $h: \mathcal{F}_1(X) \to X$ definida como $h(\{x\}) = x$ es una biyección. Notemos que esta biyección satisface casi cualquier propiedad que se le pida.

Nosotros pensamos que es interesante la pregunta “¿Qué es el conjunto potencia?” por sí misma, creemos que es muy difícil contestarla en su totalidad. La Teoría de Hiperespacios intenta proporcionar una respuesta parcial al problema de estudiar algunos subconjuntos “distinguidos” del tal conjunto. Veamos algunos ejemplos muy conocidos:

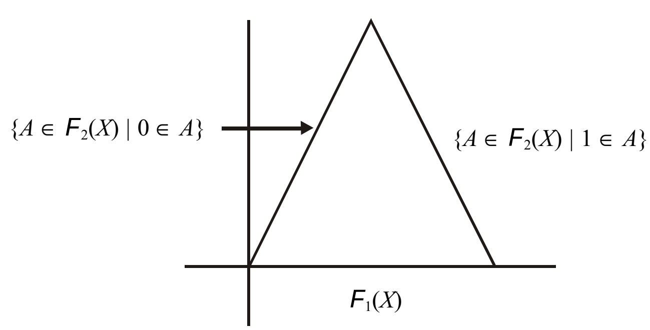
(1) Sea X el intervalo unitario $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ ¿Podemos hallar un “modelo” para $\mathcal{F}_2(X) = \{A \subset X \mid A \neq \emptyset$ tiene a lo más dos elementos$\}$? En este caso, tenemos que

$$\mathcal{F}_2(X) = \{\{a, b\} \mid 0 \leq a, b \leq 1$$

Observemos que un conjunto de la forma $\{a, b\}$ queda completamente determinado por su punto medio, $(a + b)/2$, y por la distancia entre sus elementos, $|a - b|$.

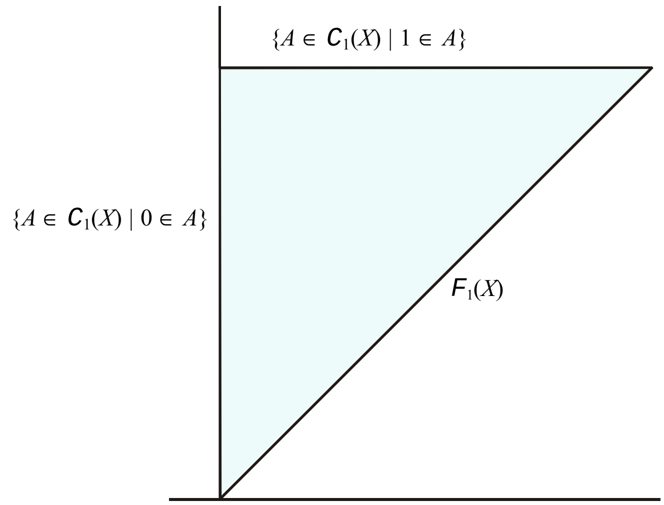


De esta forma, podemos definir una función $f : \mathcal{F}_2(X) \to \mathbb{R}^2$ como $f(\{a, b\}) = ((a + b)/2, |a - b|)$. Notemos que f es inyectiva y que su imagen consta del triángulo determinado por el eje x y las rectas $y = 2x$ y $y = 2(1 - x)$. También observemos que $\mathcal{F}_1(X)$ está representado por la parte contenida en el eje x.



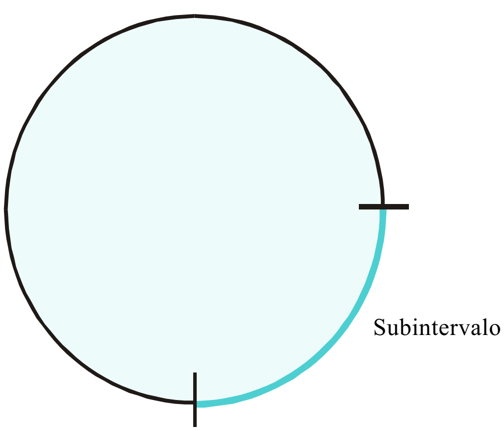
¿Podemos encontrar un modelo para $\mathcal{C}_1(X) = \{[a, b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$? Este caso es más sencillo. Definamos la función $g : \mathcal{C}_1(X) \to \mathbb{R}^2$ como $g([a, b]) = (a, b)$. Observemos que g es inyectiva y que su imagen consta del triángulo determinado por el eje y y las $y = x$

y $y = 1$. También notemos que $F_1(X)$ está representado en la parte contenida en la recta $y = x$.



Note que si "pegamos" los modelos que tenemos de $F_1(X)$ y de $C_1(X)$, se tiene que $F_2(X) \cup C_1(X)$ es un cuadrilátero.

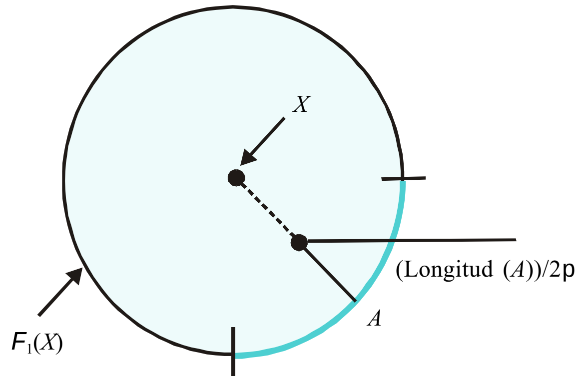
(2) Sea X la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Llamaremos *subintervalo* a cualquier arco de X.



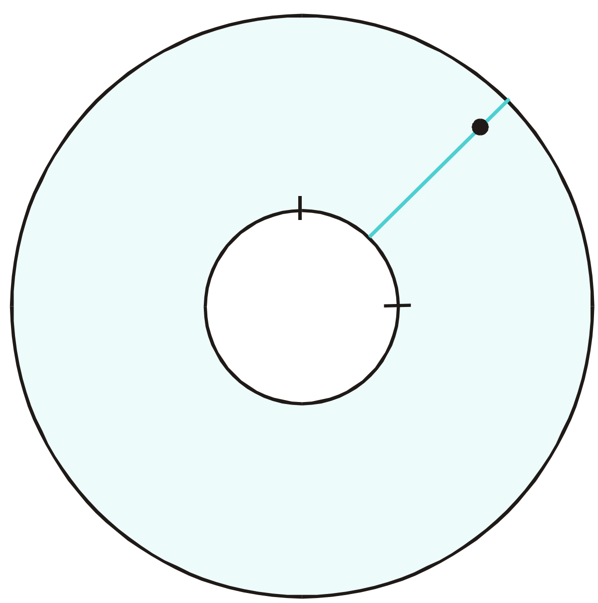
¿Podemos encontrar un "modelo" para

$$C_1(X) = \{A \subset X \mid A \text{ es un punto, un subintervalo o } X\}?$$

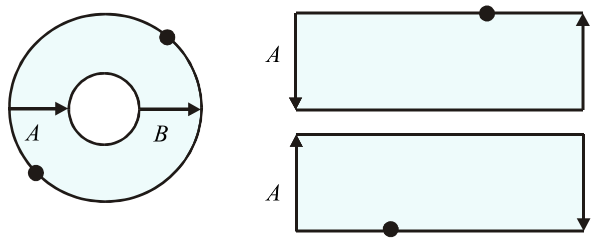
Para encontrar un modelo para $C_1(X)$, notemos que cualquier subintervalo de X está completamente determinado por su "punto medio" y su longitud. Sea A un subintervalo de X. Consideremos la recta determinada por el centro, 0, de X y el punto medio, p, de A. Sobre esta recta encontremos el punto cuya distancia a p es (longitud de A)/2p. Si A consiste de un sólo punto entonces a A se le asocia el mismo punto. Si A es X entonces a A se le asocia el punto 0. De esta forma hemos construido una biyección entre $C_1(X)$ y el disco unitario $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



Tratemos de encontrar un modelo para $F_2(X)$. Si Z es un subconjunto de X que consiste de dos puntos, los cuales no son antípodos, entonces Z determina dos segmentos de circunferencia de diferentes tamaños. De esta forma, Z queda totalmente determinado por el punto medio, q, del segmento de circunferencia más pequeño y la longitud del mismo. Consideremos el rayo que empieza en el centro, O, de X y que pasa por q y, sobre este rayo, encontremos el punto, más cercano a q, que dista de O 1+ (longitud del segmento de circunferencia más pequeño determinado por Z). Si Z consiste de un sólo punto entonces a Z se le asocia el mismo punto. De esta manera le podemos asociar a cada elemento de $F_2(X)$, que no consiste de dos puntos antípodos, un punto del anillo "semiabierto" determinado por las circunferencias X mismo y la de radio 1 + 2p y con centro en O. Ahora bien, si $W \in F_2(X)$ y consta de un par de puntos antípodos, por ejemplo $W = \{(0, 1), (0, -1)\}$ entonces hay, por lo menos, "dos maneras" de aproximarse a W, a saber, por la "izquierda" y por la "derecha". Por tanto, necesitamos identificar los puntos antípodos de la circunferencia de radio 1 + 2p y centro en O.

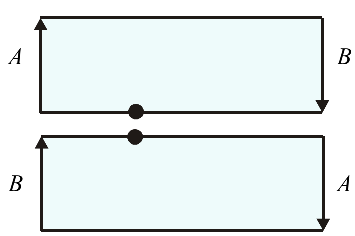


Para saber qué espacio hemos construido, hagamos un corte "horizontal" en el anillo, de tal forma que se obtengan dos mitades del "mismo tamaño". Separemos las dos partes, como se muestra en la figura.

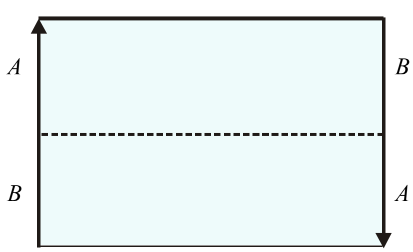


Modifiquemos la “mitad superior” de tal forma que la dirección de las flechas A y B coincidan.

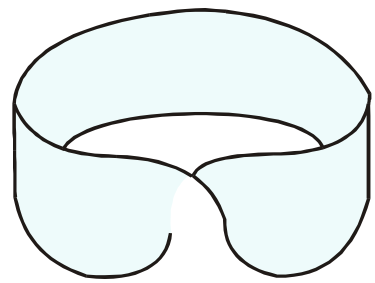
Lo que necesitamos hacer es identificar el lado superior del rectángulo de arriba con el lado inferior del rectángulo de abajo.



Una vez hecho lo anterior, obtenemos un rectángulo en el que hay que identificar sus lados laterales de la manera que indican las flechas *A y B,* ahora identificadas en un sólo segmento.



De esta manera, llegamos a la conclusión de que $F_2(X)$ es la banda de Möbius, M. Notemos que $F_1(X)$ queda representado en la frontera de M. De aquí se sigue que $F_2(X) \cup C_1(X)$ es homeomorfo al *plano proyectivo real.*



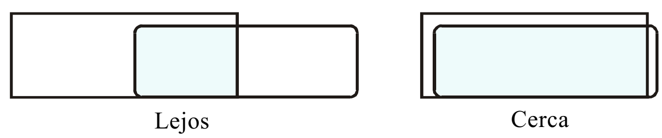
Como mencionamos anteriormente, la teoría de los hiperespacios intenta responder a la pregunta (II) utilizando la topología. Estudia ciertas subconjuntos, llamados *hiperespacios,* del conjunto potencia de los espacios métricos, compactos y conexos, llamados *continuos.* Dado un continuo X, los hiperespacios estudiados son:

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Como X es un espacio métrico, podemos definir una métrica en 2^X llamada la *métrica de Hausdorff.*



De esta forma se le da una topología a los hiperespacios con la cual todos los hiperespacios mencionados son continuos. Se restringe a los continuos por tener muchas propiedades que ayudan estudiar los hiperespacios, en particular, nos permiten probar los resultados que mencionamos en la presente nota.

En los ejemplos mencionados anteriormente, las funciones definidas resultan ser homeomorfismos cuando al hiperespacio mencionado se le considera con la métrica de Hausdorff.

Los hiperespacios más estudiados son $C_1(X)$ (esto es, la familia de subconjuntos de X que son, a su vez, continuos) y 2^X. Los otros hiperespacios mencionados están siendo estudiados recientemente.

El lector interesado en profundizar en el estudio de los hiperespacios puede consultar los libros [1] y [2]. El lector que desee saber más sobre continuos puede consultar el libro [3].

Referencias

[1] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[2] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978.

[3] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Universidad Juárez del Estado de Durango

Editado por Lino Reséndis

El XXXV congreso de la Sociedad Matemática Mexicana se llevará a cabo en la Universidad Juárez del Estado de Durango. La historia de esta Universidad data de tiempos recientes y la Sociedad Matemática Mexicana ha querido reconocer el esfuerzo de sus fundadores, que ahora hace posible realizar por primera vez un congreso en la ciudad de Durango. La siguiente reseña es, sin duda, sólo un breve recuento de todo el empeño que muchas personas pusieron en el anhelo de tener una máxima casa de estudios, que representara la casa del saber de la sociedad duranguense.

Historia del edificio central de la UJED

Las instalaciones de esta Universidad tienen una rica historia, que vale la pena conocer, en especial para todos aquellos que sean participantes del congreso de este año.

El edificio que hoy es sede de la Universidad de Durango ha pasado por diferentes etapas. Debido a su antigüedad sus raíces son eclesiásticas, más precisamente comenzó siendo el Colegio de San Ignacio, después pasó a ser el Seminario Conciliar de Durango, posteriormente Colegio Civil del estado, después Instituto Juárez y actualmente edificio central de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Así se puede decir que su historia data de antaño y conlleva en sí una larga tradición como casa de estudios.

El 26 de junio de 1767 los padres Jesuitas, fundadores del Colegio de San Ignacio, fueron expulsados por orden del rey de España, por lo que no vieron concluida la construcción de su colegio, cediéndose la administración del mismo al gobernador don José Carlos Agüero, quien a su vez puso la instalación a disposición del clero secular. La instancia eclesiástica hizo gestiones ante el rey de España para que le sea concedido el inmueble. El 30 de septiembre de 1772 se instruyó al virrey de la Nueva España, para que entregue a la Sagrada Mitra de Durango, el edificio del antiguo colegio, que se convirtió así en propiedad del Seminario Secular. Esta orden se llevó a cabo el 25 de noviembre de 1773.

Es así como le correspondió a la Sagrada Mitra concluir el edificio en el año de 1777, siendo obispo de Durango Don Macaruya de Aquilanín.

El Seminario Conciliar de Durango permaneció en este edificio hasta el año de 1859, pues conforme al decreto del 25 de enero de 1860 el Colegio Civil del Estado era el que debía ocuparlo.

Sin embargo, el Colegio Civil del Estado había sido fundado algunos años antes; más precisamente el 9 de abril de 1856, por el decreto expedido por el entonces gobernador del Estado, Lic. Don José de la Barcena. La sede inicial fue la casa que hoy ocupa la Escuela Superior de Música, situada en la calle Negrete No. 700 Pte., y abrió sus puertas el 15 de agosto del mismo año.

A fines de 1859 fue clausurado el Seminario Conciliar de Durango, y el año siguiente tomó posesión del edificio de aquella institución el Colegio Civil, conforme lo ordenó el decreto del 25 de enero de 1860, expedido por el gobernador interino Don José María Patoni. Por este mismo decreto al Colegio Civil se le denominó como Instituto del Estado. Habiendo fallecido el Sr. Presidente de los Estados Unidos Mexicanos, Lic. Don Benito Juárez García, los maestros y alumnos del Instituto del Estado solicitaron al Gobierno Estatal que cambiara su nombre por el de Instituto Juárez, accediendo a tal petición mediante el decreto del 5 de agosto de 1872.

Universidad Juárez del Estado de Durango

El 21 de marzo de 1957, aniversario del natalicio de Benito Juárez, la XLVI Legislatura del Estado de Durango aprobó el Decreto 101, propuesto por el gobernador del Estado Lic. Francisco González de la Vega, mediante el cual se constituyó la Universidad Juárez. Se recuerda que llegaron manifestaciones de apoyo y beneplácito de diversas instituciones superiores del país, así como de personalidades entre quienes se cuentan José Vasconcelos y Alfonso Caso. El primero envió un telegrama donde considera a la nueva institución baluarte de la cultura del Norte del país y el segundo le deseó una larga carrera de superación.

El mismo 21 de marzo apareció en la prensa una nota en donde el gobernador del estado declaró que "podía quedar constituida la Universidad", ya que él había enviado una iniciativa ante el Congreso al respecto, que sería discutida ese mismo día. Añadió que "haría público el resultado por la noche".

Indicó que podría quedar constituida la Universidad en atención a que el actual Instituto Juárez, con 101 años como institución educativa, contaba ya con una educación superior suficiente para adquirir dicha categoría, y así debía de convertirse en lo que sería un centro de enseñanza a la altura de los mejores de provincia de nuestro país.

La nota hizo hincapié en que, en caso de aprobar el Congreso la iniciativa, él personalmente daría la noticia en el festejo conmemorativo que se celebraría en la noche de ese día, en los corredores del Instituto Juárez. "Forma más apropiada para honrar tanto a la constitución del 17 como al Benemérito de las Américas".

El apoyo del gobierno estatal fue irrestricto, a tal grado que estaba dispuesto a ayudar y mejorar paulatinamente a la mencionada —Universidad, que además contaba con el apoyo y simpatía del Gobierno Federal y de la UNAM.

En la nota periodística, el gobernador también resaltó que la investigación científica y la difusión de la cultura serían, entre otras, parte de las metas principales que más realce den a la Universidad Juárez.

En virtud de que los periódicos no se publicaron el 22 de marzo, debido al descanso del 21, fue hasta el 23 de marzo, que se publicó una información a ocho columnas donde se reseña que fue aprobado el decreto que daba nacimiento a la nueva Universidad. El titular fue: "Cristalizó un sueño acariciado: Universidad Juárez de Durango". Y en los sumarios se pudo leer: "Hubo algarabía en el Centenario del Instituto, Alegre toque de Diana por la Nueva Institución".

En la ceremonia, visiblemente emocionado el gobernador del Estado, Francisco González de la Vega, ataviado con el birrete y la toga universitaria, conmovió a miles de asistentes cuando pronunció en el festejo conmemorativo "Viva la Universidad Juárez" y es que minutos antes el licenciado José Guillermo Salas Armendáriz, Secretario Particular del Ejecutivo, había anunciado la aprobación del Congreso al decreto por medio del cual el Instituto Juárez daba por concluida sus labores para dar paso al sueño de los durangueños: "La Universidad", señaló la nota periodística, "Las tristes Golondrinas", continuó la nota, ejecutadas por la Banda del Estado, despidieron al Instituto y es que ese nombre ya iba en el corazón de todos los que habían pisado ese viejo caserón. Poco después los heraldos estudiantiles salieron por las calles principales anunciando que Durango tenía Universidad. Fue el licenciado Abdón Alanís el primero en tomar la palabra para anunciar que nuevos senderos culturales se abrían para el Norte de la República y en especial para "nuestro Estado, con la creación de la Universidad".

El viernes 29 de marzo de 1957 más universidades del país se siguieron sumando al júbilo de los duranguenses, enviando mensajes de felicitación, deseándoles éxito. La Universidad Autónoma de Guadalajara y la Universidad Veracruzana estuvieron entre ellas, y así lo constató la prensa local.

En un reportaje realizado por Héctor Vega Franco y que apareció en "El Sol de Durango", se destacó a la nueva Universidad y en uno de sus párrafos se señalaba que José Vasconcelos designó a la Universidad Juárez como baluarte de la cultura del Norte de México.

También Vega Franco reconoció la labor realizada por el Lic. Ángel Rodríguez Solórzano, ya que en una labor de tres años –antes de crearse la Universidad- fundó la Escuela de Música, la Orquesta Sinfónica, la Escuela de Pintura y Escultura, la Escuela Secundaria y Preparatoria Nocturna, la Escuela de Medicina, la Escuela de Comercio y Administración, las cuales constituyeron las bases de la nueva Universidad, más aún fueron el argumento de solidez que dio paso a la nueva Universidad.

Rodríguez Solórzano fue así el último Rector del Instituto Juárez, y es el primero de la Universidad Juárez. En las disposiciones transitorias del mencionado decreto que avala la constitución de la Universidad Juárez se hace constar que las actuales Autoridades del Instituto Juárez pasan a ser con ese mismo carácter, las Autoridades de la Universidad Juárez del Estado de Durango.

Tomado de la revista Ciencia y Arte.
Órgano de Difusión Cultural de la Universidad Juárez
del Estado de Durango.

POSGRADO EN EL

XXXV

CONGRESO NACIONAL

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Durante el XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, que se llevará a cabo los días 6 al 11 de Octubre de 2002 en la ciudad de Durango, se abrirá un espacio académico destinado a la difusión de los Posgrados en Matemáticas y disciplinas afines ofrecidos por las distintas instituciones educativas del país, donde se pueden exhibir carteles, trípticos e información general.

Los interesados deberán dirigirse con:

Jaime Cruz Sampedro
Tels.: 01(771)717 2000 ext. 6100
sampedro@uaeh.reduaeh.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

HOTELES

Hotel Gobernador ***** **SEDE**
Av. 20 de noviembre 257 Ote.
Tel: 01(618) 813 19 19
Fax: 01(618) 811 14 22
Hab. Doble : $ 770.00 incluye impuesto
Reservaciones: Srita. Amelia García

Hotel Plaza Vizcaya ****
Gines Vázquez del Mercado No. 806
Tels: 01 (618) 817 52 62, 817 53 82,
817 53 22, 01 800 841 22 92
Fax: 01 (618) 817 55 02
Hab. Doble: $ 500.00 incluye impuesto
Reservaciones: Patricia Contreras

Hotel Best Western Los Arcos ****
H. Colegio Militar No. 2204 Ote.
Tel/Fax: 01(618) 818 77 77,
01 800 713 18 77
Hab. Doble: $ 732.00 incluye impuesto

Hotel Casablanca ***
Av. 20 de Noviembre No. 811 Pte.
Tels: 01 (618) 811 35 99
Hab. Doble: $ 522.00 incluye impuesto

Hotel Santa Cruz ***
Blvd. Francisco Villa 100
Tel/Fax: 01 (618) 818 77 66
Hab. Doble: $ 370.00 incluye impuesto

Hotel Bugambilias ***
5 de Febrero No. 418 Ote.
Entre Apartado y Regato
Tel: 01 (618) 811 97 87
Hab. Doble: $ 250.00

Hotel Plaza Catedral ***
Constitución No. 216 Sur
Tel: 01 (618) 813 24 80
Hab. Doble: $ 220.00

Hotel Roma **
Av. 20 de Noviembre No. 705 Pte.
Tel: 01 (618) 812 01 22
Hab. Doble: $ 255.00

Holiday Inn Express **** **SEDE**
Blvd.. Francisco Villa No. 4315
Tels: 01(618) 829 20 00
01 800 00 999 00
Hab. Doble : $ 750.00 incluye impuestos
Incluye desayuno americano
Reservaciones: Lic. Cynthia Maldonado

Campo México Motel ****
Av. 20 de Noviembre, Oriente
Tel/Fax: 01(618) 818 77 44,
01 800 713 18 77
Hab. Doble: $ 479.00 incluye impuesto

Posada San Jorge ***
Constitución No. 102 Sur
Tels: 01 (618) 813 32 57
Hab. Doble: $ 660.00 incluye impuesto
15% descuento adicional pago en efectivo.

Hotel Reforma ***
Francisco I. Madero 303 Sur
Tel/Fax: 01 (618) 813 16 22
Hab. Doble $ 373.00

Hotel Suites Durango ***
5 de Febrero 103 Ote. Entre Zarco y Carlos León de la Peña
Tel: 01 (618) 811 55 80
Hab. Doble: $ 320.00

Hotel Ar-vel ***
Progreso No. 104 Sur
Entre 5 de Febrero y Pino Suárez
Tel: 01 (618) 812 53 33
Hab. Doble: $ 245.00

Hotel Ana Isabel ***
5 de Febrero No. 519 Ote.
Entre Carlos León y Miguel de Cervantes
Tel: 01 (618) 813 45 00
Hab. Doble: $ 230.00

Hotel Posada Santa Elena **
Negrete No. 1007 Pte.
Tel: 01 (618) 812 78 18
Hab. Doble: $ 390.00

Aerocalifornia y Aeroméxico ofrecen vuelos a Durango partiendo desde distintos puntos de la República y con diferentes horarios, los precios que ofrece, aproximadamente, es de vuelo sencillo México-Durango $1,850.00, Guadalajara-Durango $1,350.00, (validez al 28 de junio de 2002).

Información detallada en la página de la SMM www.smm.org.mx/XXXV Congreso Nacional.

XXXV

CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

6-11 octubre 2002
Durango, Dgo.

Comité Organizador

Carlos José Signoret Poillon UAM-I
Javier Espinoza de los Monteros Díaz UJED
Francisco Javier Cepeda Flores UAdeC
Jaime Cruz Sampedro UAEH
Orlando Ávila Pozos UAEH
Emilio Lluis Puebla FC-UNAM
Isidro Romero Medina ESFM-IPN
Lino Reséndis Ocampo UAM-A
Miguel Lara Aparicio FC-UNAM
Ma. de Lourdes Palacios Fabila UAM-I
Verónica Hoyos Aguilar UPN
Gustavo Montaño Bermúdez UAEM
Alejandro Díaz-Barriga Casales IMUNAM
Edith Corina Sáenz Valadéz FC-UNAM
Stephen Sontz CIMAT
Petr Zhevandrov UMICH
Ma. Elena Luna Elizarrarás UAM-A

Sesiones Especiales

Conferencias Plenarias
Emilio Lluis Puebla FC-UNAM

Carteles
Roberto Robles Zapata ByCENED

Cursos Nivel Licenciatura
Carlos Rentería Márquez ESFM-IPN

Cursos Nivel Preparatoria
Francisco Struck Chávez FC-UNAM
Julio Rodríguez Hernández UdeG

Cursos Nivel Secundaria
Verónica Hoyos Aguilar UPN

Cursos Nivel Primaria
Mariana Saíz Roldan UPN

VII Encuentro de Escuelas de Matemáticas
Rebeca del Rocío Peniche Vera UAQ

Geometría Algebraica
Pedro Luis del Ángel Rodríguez CIMAT
Javier Elizondo Huerta IMUNAM

Cuatro décadas de Control Moderno
Vladimir G. Boltyanski CIMAT
Isidro Romero Medina ESFM-IPN

Matemáticas aplicadas a los recursos forestales
Carmen Hernández Hernández IGF-UNAM

SMM-AMS
Carlos José Signoret Poillon UAM-I

SMM-SIAM
Pablo Barrera Sánchez FC-UNAM

SMM-SOBOLMAT
Flor de María Aceff Sánchez FC-UNAM

SMM-SPM
Carlos José Signoret Poillon UAM-I

SMM-RSME
Carlos José Signoret Poillon UAM-I

Solo para Jóvenes
Armando Mata Romero UJED

Áreas

Álgebra
Fernando Barrera Mora UAEH

Análisis
Martha Dolores Guzmán Partida UNISON

Análisis Numérico y Optimización
Patricia Saavedra Barrera UAM-I

Biomatemáticas
Ma. de Lourdes Esteva Peralta FC-UNAM

Ciencias de la Computación
Edgar Leonel Chávez González UMICH

Combinatoria y Matemáticas Discretas
David Romero Vargas INEGI

Economía Matemática
Myriam Cisneros Molina IMP

Ecuaciones Diferenciales
Elena Kaikina Igorevna UMICH

Educación Matemática
Silvia Alatorre UPN

Estadística
Silvia Ruíz-Velasco Acosta IIMAS

Física-Matemática
Rafael René del Rio Castillo IIMAS

Geometría
Javier Elizondo Huerta IMUNAM
Pedro Luis del Ángel Rodríguez CIMAT

Historia y Filosofía de las Matemáticas
Juán José Rivaud Morayta UAM-I/CINVESTAV-IPN
Seminario de Cultura Mexicana

Lógica y Fundamentos
Yolanda Torres Falcón UAM-I

Probabilidad
Ana Meda Guardiola FC-UNAM

Sistemas Dinámicos
Renato Gabriel Iturriaga Acevedo CIMAT

Topología
Daniel Juan Pineda IMUNAM-Morelia

Becas y Cuotas de Inscripción

Invitado	Sin Cargo
Estudiantes	$430.00
Miembro SMM 2002	$580.00
No miembro	$950.00

¡Y sin embargo, se mueve![1]

Laura Ortiz Bobadilla
Instituto de Matemáticas, UNAM
Apdo. Postal 2345, 09898
México, D.F.
laura@matem.unam.mx

El movimiento es, sin duda, un fenómeno que nos cautiva. El ir y venir de las olas, el vuelo de los pájaros, el andar de los insectos, el bombear del corazón, el caer del agua, el incesante vagar de las ondas musicales, un simple pestañeo, la danza de una hoja marchita al ritmo de un vientecillo otoñal... Esa relación entre el desplazamiento en el espacio y el transcurrir del tiempo ha atraído la atención del ser humano desde tiempos remotos, habiéndose convertido, para muchos, en una entrañable obsesión.

Galileo Galilei (1564-1642) estudió con especial interés el movimiento de los cuerpos y, a pesar de sus múltiples avances en este rubro, consideró sus logros sólo como un inicio y un camino *"mediante los cuales otras mentes más despiertas que la mía explorarán sus más remotos rincones"*.

Isaac Newton (1642-1727), en su obsesión por entender el movimiento, logró concebir que la variación instantánea de la posición con respecto al tiempo (esencia del movimiento) podía ser representada por medio de una expresión matemática que conocemos, desde entonces, como ecuación diferencial. Para Newton todas las leyes de la naturaleza debían de poder ser expresadas por medio de ecuaciones diferenciales. Con el tiempo pudo verse, sin embargo, que las ecuaciones diferenciales, esa maravilla concebida por Newton, presentaban serios problemas para ser resueltas explícitamente. En efecto, Liouville (1809-1882) observó la imposibilidad de resolver, entre otras cosas, una gran cantidad de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en términos de integración y de funciones elementales (polinomios, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas, sus inversas y composición de éstas).

Una manera distinta de entender las ecuaciones se hacía necesaria.

La respuesta a esta necesidad no estaba lejos en el tiempo: la vena altamente creativa de Henri Poincaré (1854-1912) le lleva a proponer el estudio de las ecuaciones diferenciales sin necesidad de resolverlas explícitamente. De esta manera, haciendo un fuerte uso del análisis de las propiedades esenciales de las ecuaciones y de la teoría de variable compleja, impulsa la "teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales" (punto de arranque para lo que actualmente se conoce como sistemas dinámicos) y, por si esto fuera poco, da inicio a su vez a lo que conocemos ahora como topología.

La visión de Poincaré no sólo dio a los matemáticos una nueva manera de intentar entender el movimiento, sino que ésta hizo evidente que, frecuentemente, en el análisis cualitativo de una ecuación diferencial no basta entender sólo a la ecuación en sí misma, sino que se hace indispensable verla como parte de una familia de ecuaciones (ecuaciones que varían con uno o más parámetros). Este requerimiento no es producto tan sólo de una necesidad matemática. Los factores objetivos y subjetivos que intervienen al establecer una ecuación diferencial como representación de un fenómeno natural, hacen de ésta una expresión meramente aproximada de la realidad.

Esto implica la necesidad de establecer criterios que permitan entender el tipo de propiedades que se preservan en toda una familia de ecuaciones y el tipo de propiedades que se pierden a la más mínima perturbación (al variar los parámetros) de la ecuación original.

Hagamos el intento de ilustrar estas ideas con un ejemplo sumamente simple que a la vez nos permita hablar de otra obsesión maravillosa del ser humano: entender en el mundo circundante aquellos movimientos que tienen la particularidad de ser periódicos. Es decir, entender cuándo, en ese mar de movimientos posibles de una partícula en el espacio tridimensional, podemos asegurar que ésta vuelve, pasado un cierto tiempo, al mismo lugar del que partió.

Analicemos una expresión sencilla: $x(1 - x^2)$. Esta expresión, vista como función real, se representa por medio de su gráfica como una curva cúbica que tiene sus ceros en los puntos $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$. Interpretemos ahora esta misma expresión desde el punto de vista del movimiento. Es decir, supongamos que la expresión describe la tendencia instantánea de movimiento que posee una partícula cuya posición al tiempo t_0 está dada por el punto x_0:

$$\dot{x} = x(1 - x^2); \qquad (1)$$

hacemos notar que si dejamos transcurrir el tiempo t, $x = x(t)$ representa la trayectoria que sigue la partícula (que al tiempo t_0 se hallaba en x_0), y la derivada $\dot{x} = dx/dt$ es la variación instantánea de la posición de x con respecto al tiempo.

La ecuación (1) nos indica que todo punto distinto de 0, –1 y 1 tiene una tendencia instantánea (no nula) de movimiento. A saber, para todo punto mayor que uno la derivada de x con respecto al tiempo es negativa. Así, cada punto mayor que uno tiene una tendencia negativa a desplazarse (desplazamiento hacia la izquierda) que va disminuyendo conforme x se acerca al valor 1. Para los puntos entre cero y uno la derivada es positiva. Análogamente se

[1] Palabras atribuidas a Galileo después de haber sido obligado a negar de rodillas la validez de sus teorías (en las que se negaba la inmovilidad de la Tierra) ante el tribunal de la Inquisición. Se cuenta que al levantarse, golpeó el suelo con el pie y exclamó: *Eppur, si muove!*

analiza el comportamiento de los restantes puntos de la recta, obteniéndose sin dificultad la figura 1. Los puntos $x = -1$ y $x = 1$ se conocen como atractores (todos los puntos suficientemente cercanos a ellos son atraídos al transcurrir el tiempo positivamente). El punto $x = 0$ es llamado repulsor (todo punto cercano a él se aleja con el tiempo).

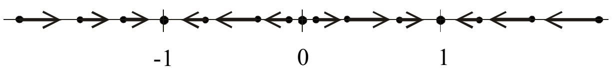


Figura 1

Puesto que nuestro interés es hablar de órbitas periódicas, resulta natural considerar una ecuación diferencial en el plano real escrita en las variables radial y angular (ρ, θ):

$$\dot{\rho} = \rho(1-\rho^2)$$
$$\dot{\theta} = 1, \qquad (2)$$

donde $\dot{\rho} = d\rho/dt$, $\dot{\theta} = d\theta/dt$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$.

La primera igualdad del sistema (2) nos indica la velocidad de crecimiento del radio ρ con respecto a t (observamos que tiene la misma expresión que la ecuación (1)) . De tal modo que en $\rho = 0$ y $\rho = 1$ el radio permanece constante para toda t (en ambos casos $\dot{\rho} = 0$). La segunda igualdad del sistema (2) nos indica que la velocidad de crecimiento del ángulo θ con respecto al tiempo t *es* constante 1. Esto quiere decir (integrando) que $\theta(t) = t$ o, en otras palabras, que el ángulo se recorre a la misma velocidad que el tiempo. Argumentando del mismo modo que hicimos al analizar la ecuación (1), podemos observar que para los valores de ρ entre 0 y 1, la derivada del radio ρ *es* siempre positiva y, por consiguiente, el radio es creciente para todo t (véase fig. 2).

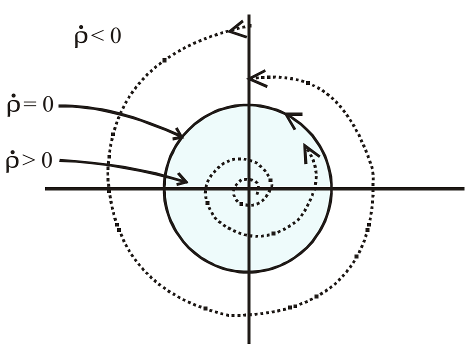


Figura 2:

Para $\rho = 1$, se tiene una órbita periódica ya que el radio es constante para todo t, $\dot{\rho} = 0$. Para $\rho > 1$ la derivada del radio es siempre negativa y, por lo tanto, el radio es decreciente para todo t (véase fig. 2). Todas las soluciones con condición inicial en las regiones $\rho < 1$ o $\rho > 1$, tienden a la órbita periódica $\rho = 1$. Esta órbita, por estar aislada de otras órbitas, se denomina *ciclo límite.*

Una vez que hemos analizado el sistema (2) consideremos un sistema parecido:

$$\dot{\rho} = \rho(1-\rho^2)^3$$
$$\dot{\theta} = 1, \qquad (3)$$

Es fácil ver que las trayectorias del sistema (3) tienen un comportamiento semejante al de la figura 2.

¿En qué son diferentes los sistemas (2) y (3)? Una primera aproximación nos permite ver que la velocidad de recorrido del radio ρ como función de t *es* diferente en ambos casos; sin embargo, ¿existe alguna diferencia más importante entre ellos? Para responder a esta pregunta necesitamos analizar cada ecuación como parte de una familia de ecuaciones que dependa (suavemente) de un parámetro ε y de la variable x.

Así, en la ecuación (2) descomponemos primeramente el término $1 - \rho^2$ en sus factores:

$$\dot{\rho} = \rho(1+\rho)(1-\rho)$$

y después consideramos la familia

$$\dot{\rho} = \rho(1+\rho)\rho(1-\varepsilon-\rho)$$
$$\dot{\theta} = 1. \qquad (4)$$

Claramente, para $\varepsilon = 0$, se tiene el sistema (2). En el caso del sistema (3) procedemos análogamente, primero reescribimos el sistema en la forma

$$\dot{\rho} = \rho(1+\rho)^3(1-\rho)^3$$
$$\dot{\theta} = 1.$$

y después consideremos, a partir de este sistema, la familia a un parámetro

$$\dot{\rho} = \rho(1+\rho)^3(1-\varepsilon-\rho)(1-\rho)(1+\varepsilon-\rho)$$
$$\dot{\theta} = 1. \qquad (5)$$

Claramente para $\varepsilon = 0$ tenemos el sistema (3).

Analicemos ahora las dos familias obtenidas ((4), y (5)). La familia (4) tiene como única característica el que para cada ε fijo, el ciclo límite está en $\rho = 1 - \varepsilon$. Es decir, la familia completa tiene, para cada ε, un retrato semejante al de la figura 2 con la única salvedad de que el ciclo límite se encuentra levemente desplazado.

En contraste, la familia a un parámetro (5) tiene tres ciclos límite correspondientes a los puntos $\rho = 1 - \varepsilon$, $\rho = 1$, $\rho = 1 + \varepsilon$. Analizando el comportamiento de $\dot{\rho}$ obtenemos que el resto de las trayectorias se comportan como se describe en la figura 3.

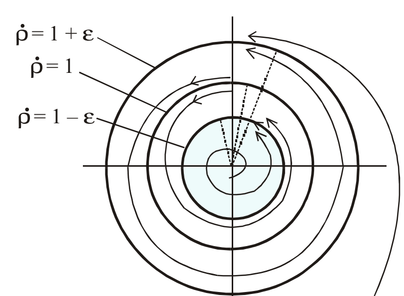


Figura 3

El sistema (3), visto ahora como parte de la familia (5), tiene un ciclo límite en $\rho = 1$ del que "nacen" dos nuevos ciclos límite para cualquier valor de ε, $\varepsilon \neq 0$ en la familia (5).

Con estos ejemplos, hemos podido comprobar (si bien superficialmente) la utilidad que tiene el mirar las ecuaciones como parte de familias a parámetros. Decimos que la órbita periódica de la ecuación (2) no se bifurca en nuevas órbitas periódicas dentro de la familia (4), mientras que la órbita periódica de la ecuación (3) se bifurca generando tres órbitas periódicas en la familia (5). Un estudio más profundo nos permite ver que la órbita periódica de la ecuación (2) no se bifurca en nuevas órbitas periódicas dentro de ninguna otra familia de ecuaciones que dependa suavemente de x y ε. Así mismo, puede verse que la órbita periódica de la ecuación (3) puede generar, a lo más, dos nuevas órbitas periódicas al ser perturbada.

El enfoque presentado, nos permite construir fácilmente ecuaciones diferenciales que contengan una órbita periódica aislada que genere un número k de ciclos límite al ser bifurcada dentro de una familia apropiada de ecuaciones.

Un problema fascinante relacionado con ciclos límite ha cumplido ya 102 años sin haber sido resuelto. Se trata del problema 16 de Hilbert. En el año de 1900, en el Congreso Internacional de Matemáticas realizado en París, el matemático alemán David Hilbert propuso a la comunidad matemática de su época una lista de 23 problemas matemáticos. Uno de estos problemas, conocido como problema 16 de Hilbert, propone en su segunda parte, estudiar *"cuál es el número y la posición de los ciclos límite de Poincaré* (soluciones periódicas aisladas) *para una ecuación diferencial polimonial*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

donde P y Q son polinomios de grado n".

El problema, así planteado, aún no ha sido resuelto y no es claro que pueda serlo (aún en el caso de polinomios cuadráticos no lo ha sido). Sin embargo, desde su planteamiento, el problema generó una intensa actividad de los matemáticos dedicados al área de las ecuaciones diferenciales. Actualmente se distinguen tres distintas lecturas del Problema de Hilbert:

1. Problema de Finitud: Demostrar que una ecuación diferencial polimonial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}, \qquad (6)$$

   donde P_n y Q_n son polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que n, tiene solamente un número finito de ciclos límite.
2. Problema de Existencia. Probar que para cualquier número natural n, existe un número positivo $H(n)$, tal que el número de ciclos límite que pueden aparecer en las ecuaciones polinomiales (6) de grado menor o igual que n está acotado uniformemente por $H(n)$.
3. Problema Constructivo. Dar una cota superior para $H(n)$ o un algoritmo que permita determinar dicha cota.

En 1923, el matemático francés H. Dulac anunció la demostración del problema de finitud. A este problema se le dio el nombre de problema de Dulac. No fue sino hasta 1982 que fue encontrado un error en la demostración presentada por Dulac. Aproximadamente 10 años más tarde, casi simultáneamente, Yu. Ilyashenko y J. Écalle presentaron demostraciones completas (y absolutamente independientes) del problema de Dulac.

En 1985 el matemático ruso V. Arnold propuso reformular el problema 16 de Hilbert en el contexto de familias suaves de ecuaciones diferenciales en la esfera de dimensión dos, S^2 (cabe señalar que las ecuaciones polinomiales tienen una extensión natural a campos de direcciones en S^2). La reformulación del problema consiste en demostrar que para ciertas familias suaves (conocidas como genéricas o típicas) de ecuaciones en la esfera, puede ser encontrada una cota superior del número de ciclos límite (esta cota resulta válida para todos los valores de la familia). Esta reformulación, conocida como el problema de Hilbert-Arnold, fue resuelta bajo una hipótesis adicional (la parte lineal de los campos en los puntos singulares tiene, al menos, un valor propio distinto de cero) en 1995 por los matemáticos rusos Yu. Ilyashenko y S. Yakovenko. Sin embargo, quedan abiertas todavía muchas preguntas relacionadas con el problema 16 de Hilbert.

Mucho habrá aún de escribirse sobre ciclos, órbitas, ecuaciones y movimiento. Posiblemente, ese colectivo que heredó de Newton la obsesión por entender el movimiento proseguirá incesante su labor sin dejar de reconocer que, tal vez, todo esto sea sólo un inicio y un camino *"mediante los cuales otras mentes más despiertas que la mía explorarán sus más remotos rincones"*.

Bibliografía relacionada con el tema

1. Arnol'd, **V.I.;** Vishik, **M.L;** Il'yashenko, Yu.S.; Kalashnikov, A.S.; Kondrat'ev, **V.A.;** Kruzhkov, S.N.; Landis, E.M.; Millionshchikov, V.M.; Olejnik, O.A.; Filippov, A.F.; Shubin, M.A. *Some unsolved problems in the theory of differential equations and mathematical physics.* (Russian, English) *Russ. Math. Surv.* 44, No.4, 157-171 (1989); translation from *Usp. Mat. Nauk* 44, No.4(268), 191-202 (1989).
2. **Dumortier, F.; Roussarie, R.; Rousseau, C.** *Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields.* (English) J. Differ. Equations 110, No.l, 86-133 (1994).
3. **Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko,** *"Concerning the Hilbert 16th Problem",* AMS Translations, Vol. 165, 1995.
4. **Il'yashenko, Yu.S.,** *Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations.* (Russian, English) *Russ. Math. Surv.* 40, No.6, 1-49 (1986); translation from *Usp. Mat. Nauk* 40, No.6(246), 41-78 (1985).
5. **Lützen, Jesper,** *Joseph Liouville, 1809-1882: master of pure and applied mathematics.* (English) Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 15. New York etc.: Springer-Verlag. xix, 884 p.
6. **Roussarie, Robert,** *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem.* (English) Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 164. Basel: Birkhäuser. xvii, 204 p.
7. **Smale, Steve.** *Mathematical problems for the next century.* (English) Arnold, V. (ed.) *et al.*, Mathematics: Frontiers and perspectives. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). 271-294 (2000).
8. **Stewart, I.** *From here to infinity.* A guide to today's mathematics. (English) Oxford: Oxford University Press. xi, 310 p. (1996). (Español) *De aquí al Infinito.* Ed. Crítica, Colección Drakontos, Barcelona (1998).
9. **Zoladek, Henryk.** *Quadratic systems with center and their perturbations.* (English) J. Differ. Equations 109, No.2, 223-273 (1994).

REUNIONES DEL 2002

III Escuela de Verano en Análisis Matemático en Cuernavaca

En el Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Cuernavaca, del 17 al 22 de junio de 2002.

http://www.matcuer.unam.mx

VII Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos

En el Anfiteatro Simón Bolívar del Antiguo Colegio de San Ildefonso, Ciudad de México, D. F. del 23 al 28 de junio de 2002.

Información: Ana Meda Guardiola
amg@hp.fciencias.unam.mx

ICTAA 2002 International Conference on Topological Algebras and its Applications

En la Ciudad de Oaxaca, Oax. del 1° al 5 de julio de 2002.

http://www.ictaa2002.unam.mx/

Escuela de Verano de Teoría de los Continuos

En la Ciudad de Puebla, Pue. del 14 al 27 de julio de 2002.

http:// www.matem.unam.mx/congresos/continuos.

Quinto Coloquio Nacional de Teoría de Códigos, Criptografía y Áreas Relacionadas

En Palacio de Minería, Tacuba No. 5, Ciudad de México, el 18 y 19 de julio del 2002.

http://www.Vcoloquio-ccar.unam.mx/

III Escuela de Verano Unidad Morelia

En el Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Morelia, del 26 al 30 de agosto de 2002.

http://www.matmor.unam.mx/eventos/escuela

XII Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría

En Rectoría General de la UAM. del 28 al 31 de octubre de 2002.

rtirado@cueyatl.uam.mx

ACCOTA 2002, Aspectos Combinatorios y Computacionales de Optmización, Topología y Álgebra

En la ciudad de San Cristóbal de las Casas, Chiapas, del 27 de noviembre al 4 de diciembre de 2002.

http://www.accota.math.cinvestav.mx.

FICOFEST

En la Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, del 9 al 13 de diciembre, 2002.

http://www.matem.unam.mx/ficofest

CONVENIOS

Concurso de Matemáticas Aplicadas y su enseñanza

La Sociedad Matemática Mexicana, a través del proyecto de grupo "Matemáticas Aplicadas y su enseñanza" convoca a la comunidad matemática a participar con propuestas educativas, que serán presentadas en el XXXV Congreso Nacional de la SMM del 6 al 11 de octubre del presente en la Cd. de Durango, Dgo.

Se otorgarán:

15 premios de $15,000 a nivel Bachillerato y
15 premios de $15,000 a nivel Licenciatura.

Las bases del concurso serán publicadas en la página de la SMM

www.smm.org.mx

Responsables del proyecto:

Dr. Fernando Brambila fbp@hp.fciencias.unam.mx
Dr. Alejandro Díaz B. diazb@smm.org.mx

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Le invitamos a inscribirse a la Real Sociedad Matemática Española (RSME) a través de la Sociedad Matemática Mexicana, aprovechando el convenio de reciprocidad que existe entre ambas Sociedades.

Costo de la cuota anual	40 euros
Costo convenio de reciprocidad	20 euros

Acudir a las oficinas de la Sociedad Matemática Mexicana en el Instituto de Matemáticas o en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

CARTA INFORMATIVA
SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 33,
Junio de 2002

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. 5622-4481 / 82
Fax 5622-4479
smm@smm.org.mx

DISEÑO Y PRODUCCIÓN

S y G editores, SA de CV
Tels. 5619-5293 / 5617-5610
syg@att.net.mx

PORTADA
Monumento a Francisco Villa
Durango, Dgo.