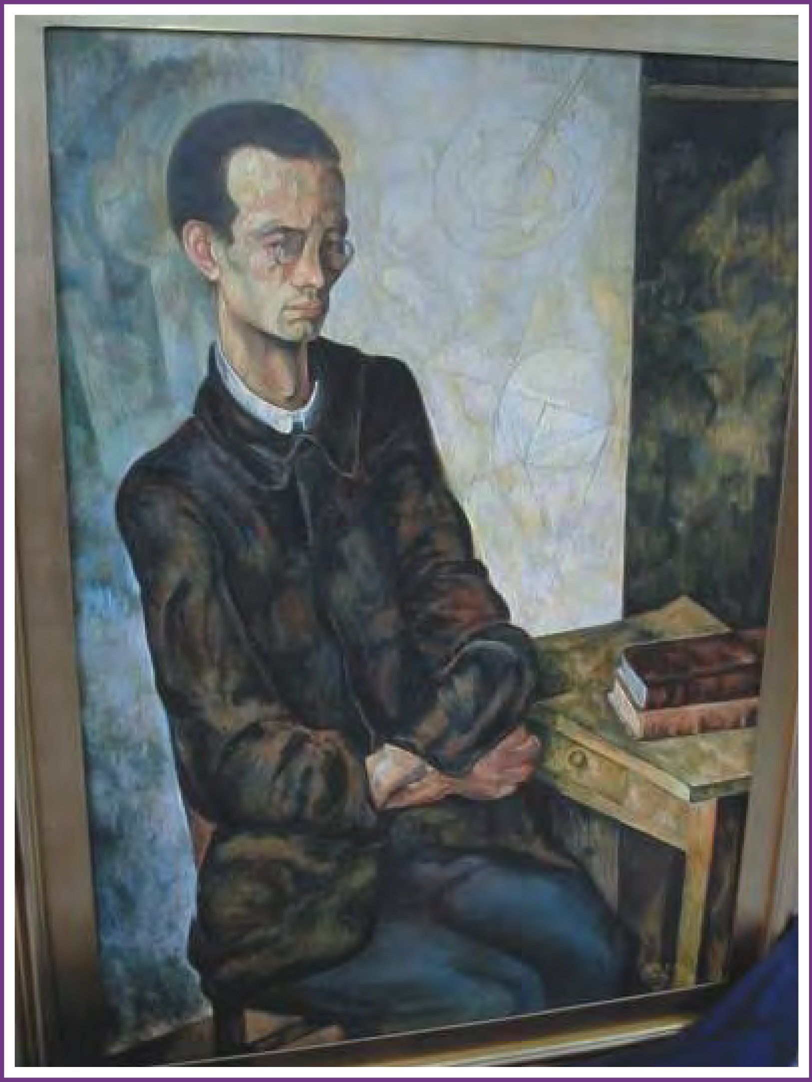
SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

# CARTA INFORMATIVA

Septiembre 2002



- Francisco González Acuña: Semblanza Humana e Intelectual
- Presentaciones Artinianas, Topología *4D* y la Física Moderna
- Topología y Geometría. Las Matemáticas de Santiago López de Medrano

# Francisco González Acuña: Semblanza Humana e Intelectual

**José María Montesinos Amilibia**
**Facultad de Ciencias Matemáticas**
**Universidad Complutense de Madrid, España**
**montesin@mat.ucm.es**

Me cumple hoy realizar una gratísima tarea. Se trata de escribir unas palabras en honor de un amigo y colaborador muy querido, matemático ilustre y una de las inteligencias más penetrantes y luminosas con que cuenta hoy la gran Nación de México. Yo agradezco mucho la honra que la Sociedad Matemática Mexicana me dispensa, por conducto de sus editores, al pedirme escribir esta breve nota. Y lo hago de corazón, aun cuando muy presente tengo la incapacidad de mi pobre pluma para expresar siquiera débilmente los sentimientos de aprecio y respeto que abrigo hacia ese fenómeno de las matemáticas que llamamos Fico.

Tuve la suerte de conocer la existencia de Fico gracias a una conversación con Don Ignacio Canals, quien a la sazón, año 1972 creo, visitaba en Madrid a Don Francisco Botella, "mi catedrático" (como entonces se decía) que lo era de la Cátedra de Geometría Analítica y Topología de la Universidad Complutense de Madrid. Acababa yo de escribir un artículo, en español, y quería enviarlo "fuera". El Profesor Canals me dijo con su suave acento mexicano: "por qué no lo envías al Boletín, en México; allí seguramente lo verá Fico; y yo te lo presentaré". Y así se inició una relación epistolar que fructificó en un artículo escrito a tres bandas (con J. Birman) sin que ninguno conociera al otro personalmente. Al intercambiar cartas en relación con ese trabajo me di cuenta de que estaba ante un matemático nada común: su interés por la generalización hasta límites inconcebibles para mí, me llenó de asombro, no menos que su peculiar modo de redacción. Claramente se veía, en aquel papel de cartilla de niño y en los trazos firmes pero irregulares de un lápiz sin punta, y humedecido a mordiscos, que aquello era un trabajo de miniaturista medieval. Estos primeros contactos fueron tan fructíferos que yo rabiaba por ver cara a cara al Fico de carne y hueso.

Y la ocasión se presentó en el verano de 1977. Fico me invitó al Instituto de Matemáticas, me recibió en el aeropuerto en su indescriptible carro, y pasamos tres meses trabajando juntos. Esta es una de las experiencias que cada vez que se repite, con ocasión de nuestros mutuos encuentros, me produce mayor placer. El que haya tenido la suerte de platicar con Fico sobre matemáticas lo sabe. Charlábamos de ello en el coche; en la calle; en la consulta del dentista; comprando tortillas; jugando al béisbol; en su casa, rodeados de niños y con su media naranja, la inefable Susana, que, recuerdo, hacía todo tipo de comentarios extramatemáticos. En fin, en todas partes. Pero Fico ni perdía la calma ni el hilo. Era la paciencia en persona. Y de un día a otro, seguía manteniendo templado el pulso sobre el problema que fuera. Y otra cosa que me llenaba de admiración era su frase: "¡tienes razón!". ¡Como si la feliz idea hubiera procedido de mí! Una simple observación que se me ocurría sobre la marcha le sumía en un tranquilo silencio que al cabo de muchísimo rato cristalizaba en su habitual "¡tienes razón!". He de confesar que casi siempre me tomaba a contrapié: él había estado pensando tan largo rato, que ya mi mente había olvidado lo que le había dicho, y, cuando me lo repetía, aquello yo no lo reconocía: casi siempre era un impecable enunciado matemático. Ya sé que alguno dirá que exagero; pero, no: fue en esos meses cuando mi respeto y admiración a tan penetrante inteligencia, unida a tal hombría de bien, a tanta generosidad y a un tan fino sentido del humor labró la irrompible amistad que me une a Fico.

Otra de las características de Fico, que creo incide profundamente en su modo de ver las matemáticas es su pasión por el juego. Un juego cualquiera, en sus manos, se convierte en matemáticas. Y estoy por decir que él concibe las matemáticas como un juego. Es característico del juego el aspecto que tiene de reto, de "torito" como diría él. Y así, muchos de sus más importantes resultados matemáticos resuelven más o menos famosas preguntas. Por ejemplo, el problema U de Neuwirth (en su libro Knot Groups) sobre si un grupo finitamente generado, de deficiencia menor o igual que cero y de peso uno es imagen homomorfa del grupo de un nudo, está resuelto por Fico en un hermoso y terso artículo en los *Annals of Mathematics* en el que además aparecen reseñadas algunas observaciones de J. Milnor. Otro caso, del que fui testigo cercano, es lo que Fico llamaba (no sé si como albur) "el último problema de Fox": sobre si existen grupos de 2-nudos con infinitas terminales, también resuelto y publicado en la misma revista, y que así mismo contiene algunas indicaciones de J. Milnor.

Evidentemente, este no es el lugar (ni el tono) para hacer justicia a la obra matemática de Fico. Desde sus primeros trabajos, en los Anales del Instituto de Matemáticas (UNAM), ya se ve el estilo inconfundible que le seguirá después hasta sus más recientes publicaciones: amor por la precisión, la generalización inteligente, la estrategia ajedrecística del jaquemate. Sus trabajos son perfectos. Hoy, cuando aparecen tantos trabajos mal escritos y casi incomprensibles, el estilo de Fico brilla como un faro en las tinieblas. Su obra es relativamente extensa y, toda ella, excelente: *pauca sed matura* parece ser también su lema. Testigos: los numerosos manuscritos que aguardan publicación en la sentina de su inseparable bolsón. Yo he visto asomar de su bolsa, el mismo manuscrito que vi hace veinte años, retocado una y mil veces. Pero así es Fico. Hombre tranquilo, enemigo de alharacas, y de una tenacidad sin límite.

Fico fue, como Milnor y muchos otros que no podemos recordar aquí, discípulo de Ralph H. Fox. Bajo la dirección de este gran matemático de la Universidad de Princeton completó Fico en 1969 su Tesis doctoral, de la que conservo con cariño un ejemplar. Fue publicada en parte en el volumen 15 del año 1970 del *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* bajo el título “Dehn´s construction on knots”. Este trabajo es una verdadera mina geométrica, que marcará las líneas de fuerza de la futura investigación de Fico. Allí aparecen en germen muchos de los problemas que luego resolverá sólo o con ayuda de alguno de sus múltiples colaboradores. Pues una característica muy suya es la facilidad de ponerse siempre al nivel de conocimientos de su interlocutor. Eso, que es prenda valiosísima del buen maestro, es en él instintivo. Tranquilamente, despacio, va desarrollando sus ideas de modo que seguirle resulta fácil y placentero. La colaboración con él es pues natural y estimulante. Por eso sus conferencias son tan apreciadas: buen estilo; buenas matemáticas. Como dice L. Neuwirth en la introducción al libro *Knots, groups and 3-manifolds*, publicado en memoria de Ralph H. Fox: “La influencia de un gran maestro y soberbio matemático se mide por su obra publicada, por las obras publicadas de sus discípulos, y, tal vez lo más importante, por la atmósfera matemática que creó y ayudó a mantener”. Pienso que en estas tres facetas la labor de Fico es igualmente memorable. Que sigamos disfrutando de su amistad, de su fino humor, de su alegría y de sus matemáticas. Fico: ¡muchas felicidades en tu sexagésimo “twist spinning”!

# Presentaciones Artinianas, Topología *4D* y la Física Moderna

**H.E. Winkelnkemper**
**Department of Mathematics,**
**University of Maryland, College Park, MD 20742**
**hew@math.umd.edu**

De los varios descubrimientos matemáticos importantes de González-Acuña aquí solo informaremos de su teoría de las, así bien llamadas por Fico mismo, presentaciones artinianas (también decimos Teoría AP, "AP Theory" en inglés) con las que Fico en 1975 [**G**] primero caracterizó los grupos fundamentales de las variedades 3-dimensionales, conexas, orientables, compactas y sin frontera. Esta nueva teoría (que apenas se está empezando a desarrollar [**AS**], [**R**], [**Si**], [**W1**], [**W2**], y que teóricamente se puede encajar total y metamatemáticamente en la teoría discreta de grupos finitamente presentados) es de hecho mucho más: desde su origen con Fico como la mejor caracterización que se pueda esperar de las $\pi_1(M^3)$, hasta ser la única versión matemáticamente rigurosa, *en el caso compacto*, de String/M Theory, Loop Quantum Gravity Theory, etc. La Teoría AP, ya con su pura existencia metamátematica pone a muchos problemas modernos en matemática y física teórica a un nivel matemático más riguroso y susceptible de ataque con las computadoras de una manera directa.

En efecto, la Teoría AP no sólo se aplica a las 3-variedades: una presentación artiniana, es decir, una presentación balanceada $r = \langle x_1,\ldots, x_n \mid r_1,\ldots, r_n\rangle$ que satisface la ecuación:

$$x_1x_2\cdots x_n = (r_1^{-1}x_1r_1)\,(r_2^{-1}x_2r_2)\cdots(r_n^{-1}x_nr_n)$$

en el grupo libre $F_n$ con $n$ generadores (cuyo grupo así presentado denotamos por $\pi(r)$), no sólo define una variedad 3-dimensional $M^3(r)$ con las propiedades mencionadas anteriormente, y con $\pi(r) = \pi_1(M^3(r))$, sino también una 4-variedad $W^4(r)$ conexa, simplemente conexa, compacta, lisa, cuya frontera es $M^3(r)$. La $n \times n$ matriz de enteros, $A(r)$, que se obtiene de $r$ abelianizando, es siempre simétrica y toda matriz entera simétrica así se obtiene; $A(r)$ representa la forma cuadrática de la 4-variedad $W^4(r)$. Es muy probable que toda 4-variedad $X^4$ conexa, simplemente conexa, compacta, lisa, con frontera conexa y simplemente conexa, se obtenga así: no se conocen otras [**GS**] p. 344.

Sea esto como sea, existen bastantes $W^4(r)$: toda $M^3$ es frontera de una $W^4(r)$ y hasta el teorema fundamental de Donaldson (obtenido con Gauge Theory o sea con métodos de Geometría Diferencial, conexiones, etc.) tiene un análogo en Teoría AP, [**R**] p. 621, [**W1**] p. 240, una teoría discreta, encajada en la teoría de grupos finitamente presentados.

*En particular podemos decir:* en Teoría AP, una 4-variedad $X^4$ con las propiedades mencionadas, ya está determinada y se reconstruye con una presentación de cierto tipo del grupo fundamental de su frontera $\partial X^4$. Aquí hay que acordarse (cuando $\pi_1(\partial X^4)$ es trivial) que las presentaciones del grupo, trivial pueden ser, *a priori*, tan complicadas como las de cualquier otro grupo.

Esto es un análogo *holográfico* [**Gr**] p. 411 conciso en la teoría de 4-variedades del "tema central de la geometría algebraica anabeliana" (que ciertas variedades anabelianas se reconstruyen totalmente de su "mixed fundamental group") en la teoría de dessin denfants de Grothendieck [**Sch**] p. 9.

Además, en un sentido directo, con la Teoría AP, por lo menos en el caso compacto, se completa en una manera radical, *pero rigurosa*, el programa (hasta hoy no riguroso) de Feynman, de suprimir la métrica en las 4-variedades: ni la topología, ni siquiera el continuo se necesita, sólo la teoría discreta de grupos finitamente presentados.

Otras propiedades, además de la de ser rigurosa, muy apreciadas por los físicos modernos de la Teoría AP son:

i) La Teoría AP sólo existe en dimensiones 3 y 4, pero en ella $n$ = 3 y 4 están otra vez caracterizados por ser las únicas $n$ en donde el grupo de trenzas $B_n$ tiene una amalgamación no trivial [**KPS**].

ii) La Teoría AP tiene su propia teoría de nudos y enlaces cuyos grupos y estructuras periféricas son fáciles de presentar, con lo que resulta que en vez de hacer cirugía "a mano" se aprovecha uno de la computadora (MAGMA). Se evita tener que "put framings in by hand" como en el Cálculo de Kirby; también se evitan problemas de auto-enlace y, de acuerdo con los consejos de Penrose y Witten, los métodos "skein", o sea proyecciones al plano, que destruyen la simetría y dinámica canónica y natural de los Torellí, etc. [**W1**] p. 227.

iii) La Teoría AP tiene dos tipos diferentes de dinámica "no local", que cambian la topología [**Gr**] p. 280, y que se mezclan en una forma complicadísima: la de los Torelli [**W1**] p. 227 y la "Galoisiana" causada por las cubiertas finitas de $M^3(r)$.

iv) La Teoría AP es "non-perturbative", "parameter-free", "background independent" y "cone-like", propiedades muy importantes y deseadas en la nueva física [**W2**].

*Lo siguiente ayuda a entender la importancia filosófica de la Teoría AP*: su origen topológico, o sea el teorema de libro abierto de Alexander [**R**] p. 617, es el análogo en dimensión 3 (la más baja) del famoso "Lefschetz Hyperplane Decomposition Theorem" (en la teoría de las variedades complejas) cuyas discretizaciones debidas a Weil, Deligne, *et al.*, en la geometría algebraica y teoría de números, son de una importancia fundamental en la matemática moderna.

Fico primero demostró, usando un teorema de Lickorish, que para una $M^3$ orientable, cerrada cualquiera, siempre se puede obtener un libro abierto con una página plana (un disco con agujeros) y entonces aprovechó esto para "discretizar" estos libros abiertos con sus presentaciones artinianas.

O sea, se puede decir que la teoría de las $M^3$, con el teorema "Lefschetziano" de Alexander, también se "discretiza", pero primero en, y con la *teoría discreta de grupos finitamente presentados* (en vez de, a la Weil-Delígne, en y con geometría algebraica y teoría de números).

Es más, Fico usó esto y "plumbing tricks", o más directamente, el método de Alexander, para probar que también siempre podemos suponer que la página (ahora ya no necesariamente plana) tiene frontera conexa: o sea, toda $M^3$ *contiene un nudo fibrado*, una propiedad que a su vez queda discretizada por un teorema fundamental de Stallings (el nudo es fibrado sí y sólo sí su grupo tiene conmutador finitamente generado).

Ahora bien, como J. Simon [**S**], usando lo anterior y un teorema de Waldhausen, caracterizó a $S^3$, entre todas las 3-esferas homotópicas, con el conjunto de tales grupos de nudos, uno se ve retado por el problema metamatemático siguiente: si la Conjetura de Poincaré fuese verdad, esta caracterización fundamental de $S^3$, seria trivial, *aunque es consecuencia de una discretización Lefschetziana de las $M^3$, en la teoría discreta básica de grupos finitamente presentados*.

Es natural concluir que esto y la universalidad de la Teoría AP, el hecho de que es una "Theory of Everything" (TOE) [**T**],[**W2**], con un análogo al teorema de Donaldson [**W1**] p. 240, [**R**] p. 621, es un mal augurio para la Conjetura de Poincaré.

Para entender lo siguiente, se le recomienda al lector interesado que tenga [**W1**] sec. 0, también [**R**] Appendix, a la mano. Estas referencias tienen las definiciones y notaciones básicas (libro abierto, $\mathcal{R}_n$, nudo $k_i$ y grupo $G_i$, acción de los Torelli) así como propiedades elementales, ejemplos, referencias más precisas, etc. Además $\Sigma(p, q, r)$ denota una esfera de Brieskorn e $I(120) = \langle a, b \mid a^3 = b^5 = (ab)^2\rangle$, el grupo icosaedral binario, que también es el grupo fundamental de la 3-esfera homológica de Poincaré, $\Sigma(2, 3, 5)$.

*Indiquemos brevemente un poco más explícitamente 3 direcciones principales en donde, no nos cabe duda, la Teoría AP tendrá aplicaciones importantes:*

I. Con la computadora, encontrar ejemplos y contraejemplos cruciales en dimensión 3 y 4, usando criterios algebraicos obtenidos en la Teoría AP.
II. En dimensión 3 y 4, tratar de unificar los métodos *ad hoc* en el cómputo de invariantes de Donaldson, Seiberg-Witten, etc., [**FS**], [**L**].
III. Aplicaciones rigurosas a la física moderna de 't Hooft, Isham, Maldacena, Penrose. Rovelli, Smolin, Susskind, Witten, *et al.*: *la Teoría AP es una TOE* [**W2**], [**T**], [**Gr**], [**Sm**], [**Wi2**].

**I.** Aquí Fico primero usó sus presentaciones (y teoremas de Lickorish, Waldhausen) para dar criterios puramente algebraicos, mucho más claros y transparentes que los entonces existentes, para estudiar la Conjetura de Poincaré [**G**]. Más recientemente usando teoremas de A. Connor, J. Simon, Fico demostró que esta última es equivalente a la:

**Conjetura:** Si $\langle x_1,\dots , x_n \mid r_1,\dots, r_n\rangle$ es una presentación artiniana del grupo trivial, entonces $\langle x_1,\dots , x_n \mid r_1,\dots, r_{n-1}\rangle$ presenta un grupo de nudo en $S^3$.

Pero también para otros problemas en la teoría de 3-variedades, la Teoría AP se ha aplicado con éxito: en una forma relativamente fácil se pueden encontrar ejemplos de "cirugía cosmética" a la McCullough y 3-esferas homológicas que tienen cubiertas regulares finitas que también son 3-esferas homológicas, a la Luft-Sjerve [**LS**].

Otros problemas importantes que uno quiere resolver con contraejemplos, usando el programa MAGMA, en Teoría AP son:

i) Encontrar 3-esferas homológicas $\Sigma^3(r)$ con $\pi(r) = \mathrm{I}(120)$, que no sean espacios de Seifert, o que tengan invariante de Casson $\lambda(\Sigma^3 (r)) \neq \pm 1$.
ii) Encontrar dos $\Sigma^3(r)$, $\Sigma^3(r')$ irreducibles con $\pi(r)$ isomorfo a $\pi(r')$, pero cuyos invariantes de Casson son diferentes en valor absoluto.
iii) Demostrar que la tabla de Hopf de Milnor, [**Mi**] p. 628, que cataloga todos los grupos finitos que actúan libremente e isométricamente en $S^3$, queda incompleta, si ahí también se hubiese tratado de catalogar todos los $\pi(r)$ finitos.
iv) Encontrar una 3-esfera homotópica donde el teorema de Gordon-Luecke [**GL**] es falso.

Un contraejemplo cualquiera de éstos ya demostraría la falsedad de la "Geometrization Conjecture" de Thurston [**Sc**], que desea que toda $M^3$ se descomponga naturalmente en variedades con estructura geométrica.

Los siguientes ejemplos exhiben algunos de los cómputos que fácilmente se hacen con MAGMA en la Teoría AP:

**Ejemplo 1:** Consideremos la siguiente presentación artiniana $r$ en 8 generadores, cuya matriz $A(r)$ es como la $\phi_8$, [**W1**] p. 234, pero con los signos cambiados fuera de la diagonal ($A(r)$ sigue siendo $\mathbb{Z}$-congruente a $\phi_8$):

$$r_1 = x_1^3(x_1x_2)^{-1}$$
$$r_2 = x_2^6x_1^{-1}x_3x_4x_3^{-5}r_3$$
$$r_3 = x_3^4(x_3x_4)^{-1}x_1(x_1x_2)^{-1}(x_3^{-1}, x_4^{-1})x_3^{-1}x_1(x_1x_2)^{-1}$$
$$r_4 = x_4^3x_3^{-1}x_5x_6x_5^{-4}r_5$$
$$r_5 = x_5^3(x_5x_6)^{-1}x_3(x_3x_4)^{-1}$$
$$r_6 = x_6^3x_5^{-1}x_7x_8x_7^{-4}r_7$$
$$r_7 = x_7^3(x_7x_8)^{-1}x_5(x_5x_6)^{-1}$$
$$r_8 = x_8^2x_7^{-1}$$

Aquí $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$.

i) Si cambiamos $r_s$ a $x_8^{-1}r_8$, obteniendo $r'$, $M^3(r')$ es una 3-esfera homológica con $\pi(r')$ isomorfo a $\pi_1(\Sigma(2, 3, 11))$; el grupo, $G_8$, ver [**Wl**] p. 227, del nudo $k_8$ es isomorfo al del nudo toroidal $t(2, 11)$ de $S^3$, pero, con $r'$, se puede demostrar que $G_2 = \langle x, y \mid y^2 = x^2yx^2\rangle$, (con estructura periférica $m = x^{11}y^{-3}$, $l = x^2m^2$, polinomio de Alexander $= t^4 - t^2 + 1$, 2-torsión 0) no es grupo de un nudo en $S^3$. La cubierta ramificada cíclica de $k_2$ de orden 2 es una 3-esfera homológica y MAGMA da: $\pi = \langle x, y, z \mid x^2 = yxy, z^2 = yzy, y^{11} = x^3z^3\rangle$, que es isomorfo al $\pi$ de la esfera de Dehn correspondiente a $ml^{-1} = 1$, del "right handed granny knot" de $S^3$. Los polinomios de Alexander de los nudos $k_0$ de $M^3(r)$ y $M^3(r')$ son irreducibles de grado 1026 y 296, respectivamente.
ii) Si en $r$ cambiamos $r_1$ a $x_1$, $r_2$ a $x_2^{-4}r_2$, $r_8$ a $x_8$, y los demás $r_i$ a $x_ir_i$, obtenemos con MAGMA un grupo de orden 55880 = 8·6985 que abelianiza a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{110}$. Pero como su subgrupo comutador tiene orden 254 = 2·127, no logramos (ver [**Lee**] p. 155 y p. 199) salir de la tabla de Hopf: el grupo debe ser isomorfo a $Q_{4\cdot 254} \times \mathbb{Z}_{55}$, con la notación de Milnor [**Mi**] p.628.

**Ejemplo 2:** Sea $r'$ la presentación en 8 generadores dada en [**Wl**] p. 233, [**R**] p. 619: $\pi(r') = I(120)$ y $M^3(r')$ es $\Sigma(2, 3, 5)$, la 3-esfera homológica de Poincaré; si sólo cambiamos $r_7'$ a $x_7^{-3}r_7'$, obtenemos $\pi = I(120) \times \mathbb{Z}_{11}$.

¿Qué pasa si multiplicamos estratégicamente por alguna Torelli?

Estabilicemos al principio y multipliquemos (por la izquierda) ahí por la $t_3$ de [**Wl**] p. 229, obteniendo con MAGMA una $r$ con 9 generadores y $A(r) = \langle 1\rangle \oplus E_8$:

$$r_1 = x_1x_3x_1x_2(x_3x_1)^{-1}x_1(x_1x_2)^{-1}$$
$$r_2 = x_2(x_1, x_3)(r_1, x_1)x_2x_3$$
$$r_3 = x_3x_1(x_1{}^2x_3x_1x_2)^{-1}r_1x_1x_2x_3(r_1, x_1)x_2x_3x_5{}^{-1}x_4x_5$$
$$r_4 = x_4x_5(x_2x_3)^{-1}(x_1, r_1)(x_3, x_1)x_2{}^{-1}(x_1x_3)x_1x_2x_1{}^{-1}r_3$$
$$r_5 = x_5x_4x_5x_8x_9{}^{-2}r_9x_8{}^{-1}$$
$$r_6 = x_6x_7x_8x_9(x_4x_5x_8)^{-1}r_5$$
$$r_7 = x_7{}^2x_8x_6(x_6, x_7x_8x_9)$$
$$r_8 = x_8{}^2(x_7x_8x_9, x_6)(x_7x_8x_6)^{-1}r_7$$
$$r_9 = x_9(x_7x_8)^{-1}x_6, x_7x_8x_9$$

$M^3(r)$ sigue siendo una $\Sigma^3(r)$ a la Luft-Sjerve pero con $\pi(r)$ infinito; en particular, ya no es una variedad de Seifert, [**LS**] p.474: *aquí nada más multiplicando por $t_3$ se destruye esta propiedad*. Si hacemos el cambio análogo de cambiar $r_8$ a $x_8{}^{-3}r_8$, obtenemos una $M^3$ cuyo $\pi$ es infinito y abelianiza a $\mathbb{Z}_{11}$, y cuya 11-cubierta es una $\Sigma^3$ también a la Luft-Sjerve, más "pura" que las hasta ahora obtenidas: las abelianizaciones de los subgrupos de $\pi_1(\Sigma^3)$, $\pi_1(M^3)$ de por lo menos índice $\leq 17$ (hasta donde MAGMA puede) son todas iguales a las del grupo finito $I(120)$, $I(120) \times \mathbb{Z}_{11}$, respectivamente.

Para $\pi_1(M^3)$, a mano, uno obtiene la siguiente amalgamación sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, del grupo $G = \langle a, b \mid b^2 = a^2ba^2\rangle$ con $B_3 = \langle c, d \mid c^3 = d^2\rangle$:

$$\pi_1(M^3) = \langle a, b, c, d \mid b^2 = a^2ba^2, c^3 = d^2, b^{-2}a^{11}b^{-1} = cd^{-1}c, ba^{-9}b^2 = cdc^{-1}dc\rangle.$$

Para $\pi(r)$, nada más cámbiese $cdc^{-1}dc$ a $c(dcd)^{-1}c$, o sea estas variedades seguramente se obtendrán pegando el "knot manifold" del nudo $k_2$ del ejemplo 1, con el del trébol $3_1$.

El nudo $k_1$ de $M^3(r)$ tiene polinomio de Alexander $6t^2 - 11t + 6$ y su esfera de Dehn correspondiente a $ml = 1$ es $\Sigma(2, 3, 5)$, asi que el invariante de Casson de $M^3(r)$ será $\pm 5$ o $\pm 7$. En contraste con el ejemplo 1, aquí $k_0$ de $M^3(r)$ tiene un polinomio de Alexander reducible de grado 12.

*¿Puede G ser grupo de un nudo en una* $\Sigma^3$ con $\pi = I(120)$?

Si en el ejemplo 2, en vez de $t_3$, usamos $t_2$, [**Wl**] p. 229, MAGMA da $\pi(r) = I(120)$ y, como $t_3$ ahí destruyó la estructura de Seifert, es natural plantear el siguiente problema básico:

Sea $r' \in \mathcal{R}_n$ tal que $\Sigma^3(r') = \Sigma(2, 3, 5)$, sea $t \in \mathcal{R}_n$ tal que $\pi(t \bullet r') = I(120)$.

*¿Sique siendo* $\Sigma^3(t \cdot r')$ *una variedad de Seifert?*

No parece haber alguna razón que siempre lo siga siendo y quizá así aparezca una esfera de Poincaré exótica.

Claro que la situación en realidad muy probablemente es mucho más sutil y las presentaciones artinianas que hemos dado no darán ejemplos patológicos: para esto se tendrán que analizar $r$ con más generadores; pero creemos haber indicado cómo se puede proceder con MAGMA en la Teoría AP, sin tener que tener grandes conocimientos matemáticos de topología, teoría clásica de nudos en $S^3$, etc.

**II.** Aquí también González-Acuña dio el primer arranque con su fórmula para el invariante de Rohlin de una 3-esfera homológica, $\Sigma^3(r)$, dada por una presentación artiniana $r$. Consideremos sólo el caso cuando la matriz $A(r) = I$; entonces Fico obtiene el invariante de Rohlin de $\Sigma^3(r)$, como sigue: dada la $r = (x_1,..., x_n \mid r_1,..., r_n)$ consideremos la presentación:

$$\langle x_1,..., x_n \mid x_1r_1 = r_1x_2, x_2r_2 = r_2x_3,..., x_{n-1}r_{n-1} = r_{n-1}x_n\rangle$$

que siempre presenta un grupo que abelianiza a $\mathbb{Z}$, y por lo tanto tiene un polinomio de Alexander cuyo valor en $-1$ denotamos por $d_r$.

Fico demostró que siempre se tiene: $\mu(\Sigma^3(r)) = (d_r{}^2 - 1)/8\ mod2$.

Esta es una fórmula interesante y de tipo nuevo: no se necesita mencionar cobordismos, el continuo, la topología lisa o métodos "skein", etc.

*La fórmula es sólo de la teoría discreta de grupos finitamente presentados.*

Por lo tanto es natural conjeturar, que debido a la ausencia del continuo obstruyente, fórmulas similares existen para, por ejemplo, unificar los métodos *ad hoc* en el cómputo de invariantes de Seiberg-Witten, ver, e.g. [**L**], o los invariantes usados por Fintushel y Stern [**FS**] para distinguir estructuras lisas en 4-variedades.

*¿Cómo cambian las estructuras lisas de $W^4$ (r) bajo la acción de las Torelli, cuando el tipo topológico de $M^3(r) = \partial W^4(r)$ queda fijo,* [**W1**] *p. 226 y sec.4?*

Esto es parte de un programa más general, donde el continuo tiene menos oportunidad de obstruir.

Otros problemas importantes en Teoría AP, relacionados con invariantes de Donaldson, son:

i) Encontrar una $r \in \mathcal{R}_{22}$, donde $W^4(r)$ define una variedad $K3$; se sabe que siempre tendrán invariantes de Donaldson no triviales, [**FM**] p. 5. Esto dará el primer puente de la Teoria AP a la Geometría Algebraica.

ii) Sea $\Sigma^3(r)$ una 3-esfera homológica; consideremos los invariantes polinomiales relativos de Donaldson de $W^4(r)$, que tienen valores en la homología de Floer de $\Sigma^3(r)$, [**A**] p. 295, [**TB**]; *estos invariantes deben estar discretamente, completamente en función de la presentación artiniana r* (así como lo es, con la fórmula de Fico, el invariante de Rohlin de $\Sigma^3(r)$).

Ahora bien, si $\Sigma^3(r) = S^3$, o sea cuando podemos suponer que $W^4(r)$ no tiene frontera, estos invariantes de Donaldson satisfacen condiciones muy especiales: *la teoría de Floer entonces desaparece, hecho de que tiene que tener un análogo discreto visible en la presentación r*.

Esto otra vez no favorece a la Conjetura de Poincaré, ya que, *a priori*, invariantes de una presentación no se necesitan anular por el mero hecho que el grupo presentado es trivial.

Ya que $\mu(\Sigma^3(r))$ es el análogo de la característica de Euler (*mod2*) en la teoría de Floer, la fórmula de Fico indica que (además de un análogo de la teoría de Donaldson) un análogo de la teoría de Floer también debe existir en la Teoría AP, [**Wi1**] p. 352.

**III.** Para una primera introdución a la física moderna y sus teorías y problemas conceptuales generales de Holography, Quantum Gravity, String/M Theory, Loop Quantum Gravity Theory, TQFTs y TOE (Theory of Everything), ver el no. 11 en *J. Math. Phys.* 36 (1995), los libros recientes de Smolin [**Sm**], Greene [**Gr**] y [**AGMOO**], [**Wi2**].

Ya que la Teoria AP es intrínsecamente 4-dimensional y su holografía es la más reductiva y discreta posible, y como ya hasta la holografia AdS/CFT de Maldacena [M], ha sido útil en unificar las aparentemente diferentes "String Theories," por lo menos en el caso compacto ("Mach-iano"), es natural concluir, más radicalmente: *la única String/M Theory, 4-dimensional, matemáticamente rigurosa que existe es, ni más, ni menos, la Teoría AP con las definiciones y analogías en* [**W2**]. Esto inaugura por lo menos en el caso compacto, la "third superstring revolution" [**Gr**] p. 411.

La Teoría AP también, *ab initio* es una Quantum Gravity Theory, ya que es discreta pero el continuo está todavía disponible.

La Teoría AP es una TOE natural así negando la pregunta titular de Tegmark [**T**].

*La Teoría AP no es un "modelo", a menos que uno crea que la teoría de números o de grupos lo son.*

Además, la única Loop Quantum Gravity Theory, [**Sm**] p.183-193, rigurosa será la Teoría AP, pero "levantada" a la cubierta "class surface" de la página.

Terminemos esta sección con un reto a los físicos modernos: obviamente, es una virtud del teorema de Donaldson, una indicación de su profundidad, que a pesar de ser obtenido con ayuda de Gauge Theory (o sea con geometría diferencial, conexiones, ecuaciones diferenciales parciales, etc.), sobrevive la holografía radical discreta de la Teoría AP, de encajarse en la teoría discreta de grupos finitamente presentados.

*¿Qué otros de los muchos resultados, teorías, ver* **[AGMOO]**, *que usan la geometría diferencial, conexiones, ecuaciones diferenciales parciales, etc., (más o menos rigurosamente) sobreviven en Teoría AP, así como ahí sobrevivió el teorema de Donaldson, cuya importancia, no sólo en matemática pura, sino, según Penrose* [**P**] *y Witten* [**Wi1**] *p. 351,* [**Wi2**] *p. 1188, también en la física moderna, es fundamental?*

Para finalizar observemos, que aunque todos sabemos que Fico se doctoró en Princeton, no dejan de asombrar tantos nombres de los grandes "princetonianos" relacionados con la Teoría AP: Alexander, Artin, por sus teoremas sobre trenzas y presentaciones; Lefschetz, Milnor, Stallings, por sus teoremas de decomposición y fibración; Fox, Lyndon, Papakyriakopoulos, por su filosofía, que no sólo en dimensión 2, sino también en dimensión 3, la teoría de variedades compactas se debe encajar radicalmente en la teoría discreta de grupos finitamente presentados; y, finalmente, Witten, Maldacena con la nueva física.

Y claro, hasta olvidándose uno de sus otros teoremas importantes, nada más con su descubrimiento de la Teoría AP, entre ellos estará González-Acuña.

## Referencias


[AGMOO] Aharony, O., Gubser, S., Maldacena, J., Ooguri, H. and Oz, Y., *Large N field theories, string theory and gravity,* Phys. Rep. **323**, no. 3-4, **2000**, 183-386.

[AS] Armas-Sanabria, L., Grupos de tremas y cerradura de trenzas puras. Tesis, UNAM, 2000.

[A] Atiyah, M., New invariants of manifolds, *Proc. Symp.* in *P. Math.* **48**, AMS, 1988, 285-299.

[FS] Fintushel, R., Stem, R., Knota, links and 4-manifolds, *Inv. Math.* **134**, 1998, 363-400.

[FM] Friedman, R., Morgan, J., *Smooth 4-manifolds and complex surfaces,* Ergebnisse 27, Springer, 1991.

[GL] Gordon, C., Luecke, J., *Knots are determined by their complements,* BAMS 20, 1989, 83-87.

[GS] Gompf, R., Stipsicz, A., *4-manifolds and Kirby Calculus,* GSM 20, AMS, 1998.

[G] González-Ácuña, F.J., *3-dimensional Open Books,* Lecture Notes, U. of Iowa, 1975.

[Gr] Greene, B., *The Elegant Universe,* Vintage Books, 2000.

[KPS] Karrass, A., Pietrowski, A. and Solitar, D-, *Some Remarks on Braid Groups,* Contemp. Math 33, 1984, 341-352.

[Lee] Lee, R., *Semicharacteristic classes,* Topology 12, 1973, 183-199.

[L] Lim, Y., *The equivalence of Seiberg-Witten and Casson invariants for homology 3-spheres,* Math. Res. Lett. 6, no.5-6, 1999, 631-643.

[LS] Luft, E., Sjerve, D., *Regular coverings of homology 3-spheres by homology 3-spheres,* TAMS 311, 1989, 467-481.

[M] Maldacena. J., *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity, Adv.* Theor. Math. Phys. 2, 1998, no. 2, 231-252.

[Mi] Milnor, J., *Groups which act on* S" *without fixed points,* Am. J. of Math. 79, 1957, 623,630.

[P] Penrose, R., *Donaldson"s moduli space: a "model" for quantum gravity,* Quantum Theory of Gravity, 295-298, Hilger, Bristol, 1984.

[R] Ranicki, A., *High- Dimensional Knot Theory,* Springer, 1998, with an Appendix by H. E. Winkelnkemper.

[Sch] Schneps, L. editor, *The Grothendieck Theory of Dessin d"Enfants,* London Math. Soc. Lecture Notes 200, Cambridge Univ. Press, 1994.

[Sc] Scott, G. P., *The geometries of 3-manifolds.* Bull. London Math. Soc. 15, 1983, 401-483.

[Si] Simon, A., *Geschlossene Zopfe als Versweigungsmengen irregularer Uberlagerungen der 3-Sphare,* Thesis, Frankfurt, 1998.

[S] Simon, J., *Fibered knots in homotopy 3-spheres,* Proc. AMS 58, 1976, 325-328.

[Sm] Smolin, L., *Three Roads to Quantum Gravity,* Basic Books, 2001.

(TB) Taubes, C. and Bryan, J., *Donaldson-Floer theory m Gauge theory and the topology of 4-manifolds (Park City, UT, 1S94), lAS/Park City Math Ser.* 4, AMS, 1994, 195-221.

[T] Tegmark, M., *Is "the Theory of Everything" Merely the Ultimate Ensemble Theory* ?, Ann. of Phys. 270, 1998, 1-51.

[Wl] Winkelnkemper, H. E., *Artin Presentations I: Gauge Theory, 3+1 TQFTs and the Braid Groups, 1.* Knot Theory Ramifications 11, no. 2, 2002, 223-275, available at: http://www.math.umd.edu/~hew/

[W2] Winkelnkemper, H. E., *Artin Presentations U: A Discrete, Purely Group- Theoretic TOE, to* appear.

[Wil] Witten, E., *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial,* Comm, Math. Phys. 121, 1989, 351-399.

[Wi2] Witten, E., Magic, Mystery and Matrix, Notices AMS 45, 1998, 1124-1129.

# Topología y Geometría. Las Matemáticas de Santiago López de Medrano

**E. Javier Elizondo**[1]
**Instituto de Matemáticas UNAM**
**javier@math.unam.mx**

## Introducción

Transcurría el año de 1975, acababa de ingresar a la carrera de matemáticas, recuerdo que me encontraba en el auditorio de la vieja Facultad de Ciencias cuando una persona a mi lado señaló a un profesor que se encontraba a unos cuantos metros de mí, estaba sentado en las escaleras y usaba un saco poco formal, con la mano izquierda tomaba discretamente de la bolsa del saco un poco de pan que comía como refrigerio en las largas discusiones que se llevaban a cabo. Un poco después, encendía un cigarro que había sacado de un paquete de su bolsa. Me quedé sorprendido cuando la persona que lo había señalado me comentó que su nombre era Santiago y que era premio de la Academia de Ciencias. Tardé varios semestres más en conocerlo personalmente.

Santiago es uno de los matemáticos de mayor influencia que México ha tenido. Todos aquéllos que hemos tenido la oportunidad de haber tomado un curso, o haber conversado un poco de matemáticas con él, nos damos cuenta de la profundidad de su pensamiento matemático.

Como podrá comprender el lector, la tarea de explicar el trabajo de Santiago en unas pocas líneas es imposible sin cometer imprecisiones. Espero que el lector pueda perdonarlas.

## Primeros años

Santiago López de Medrano Sánchez nació en la ciudad de México el 15 de Octubre de 1942. En la secundaria empieza su atracción por las matemáticas. Fue en este periodo cuando él mostró algunas aptitudes para esta ciencia. En una ocasión uno de sus maestros de matemáticas planteó una afirmación en clase, fue Santiago el único en darse cuenta que ésta era falsa. Por supuesto que el maestro se resistió a reconocer que el alumno tenía razón, hasta que después de un tiempo tratando de probar en el pizarrón su afirmación, tuvo que aceptar que su alumno estaba en lo correcto.

## Los años de la preparatoria

Es en la preparatoria donde recibe en forma definitiva las influencias que lo llevarían a estudiar matemáticas. Por un lado, las conversaciones con el orientador vocacional (de los pocos buenos que puede haber, ya que casi todos desorientan), y de un compañero brillante que charlaba de matemáticas con él. Este compañero preparatoriano, Peter Solt Salgo, le recomendó leer el libro de Birkhoff-MacLane. Fueron estas conversaciones una de las causas que consolidaron la idea de estudiar matemáticas. Sin embargo había una pequeña dificultad, sus padres. Como sucede con muchos de nosotros que decidimos estudiar matemáticas, la objeción que surge de parte de los familiares es el cuestionamiento de si las matemáticas nos permitirán ganar suficiente dinero como para garantizarnos tener una vida cómoda. La misma pregunta surge de parte de nuestros padres cuando uno quiere estudiar música, filosofía o cualquier carrera que se considere "sin futuro". Así que Santiago, con la ayuda de su madre en la negociación familiar, ingresa en 1960 a la Facultad de Ciencias a estudiar dos carreras simultáneas, matemáticas y física experimental, ésta última tenía la virtud "de que aprendería electrónica, misma que le daría conocimientos prácticos" que le permitirían obtener un "buen trabajo".

## Los años de la licenciatura

Durante el primer año de la licenciatura en matemáticas, tomó cursos con maestros que han dejado historia y una tradición ejemplar en la Facultad de Ciencias y en las matemáticas de México. Los maestros de mayor influencia durante este primer año fueron Emilio Lluis Riera y Guillermo Torres Díaz. Santiago llevó a buen término su primer año en ambas carreras.

En el segundo año, además de los cursos formales, tomó el curso Historia de las Matemáticas con Dirk J. Struick, y participó en el seminario de álgebra lineal con Emilio Lluis, basado en el libro de Gelfand.

El tercer año de la carrera es determinante en el futuro de Santiago. Cursa Variable Compleja con Guillermo Torres y Análisis con Humberto Cárdenas, este último curso basado en el libro de Dieudonné. Durante el verano, Norman Steenrod ofrece en el Instituto de Matemáticas un curso introductorio sobre homología de complejos CW. Santiago y sus compañeros más cercanos, Francisco González Acuña (Fico) y Elmar Winkelnkemper deciden tomar este curso. Santiago toma la tarea de escribir las notas del curso. Al terminar asiste a un curso de Topología Algebraica dictado por Roberto Vázquez. Fue en este momento que Santiago decide abandonar la carrera de física y se dedica exclusivamente a las matemáticas.

En el último año de la carrera se consolida su formación a nivel licenciatura. Lleva dos seminarios: uno de Topología Diferencial, basado en las notas de Milnor; otro de Haces Fibrados, basado en el libro de Steenrod. Además de las materias requeridas: Historia de

[1] Agradezco a los editores de la carta informativa por la invitación a escribir esta breve reseña, y a Santiago por el tiempo dedicado a explicarme algunos de sus teoremas.

las Matemáticas con Alberto Barajas, Lógica con Gonzalo Zubieta y Ecuaciones Diferenciales con Juan Morcos. Empieza a escribir su tesis bajo la dirección del doctor Vázquez sobre los teoremas de Hurewicz y de Whitehead. Dedica un tiempo para aprender fibraciones de Serre y sucesiones espectrales, herramienta indispensable para los cálculos que aparecen en Topología Algebraica, material nada elemental para un estudiante de licenciatura.

Finalmente se recibe en el año de 1964, año en que parte al extranjero a realizar sus estudios de posgrado.

## El doctorado en Princeton

Santiago llega a Princeton en 1964. Durante los dos primeros años asiste a diversos cursos. Algunos de sus profesores en esa época fueron W. Browder, N. Steenrod, R. Abraham, J. Stallings, J. Milnor, J. Moore y A. Haefliger.

Con Bill Browder estudia Teoría de Cirugía de Browder y Livesay. Él, junto con sus compañeros Ralph Reid, David Stone y Dennis Sullivan se proponen escribir unas notas del curso, proyecto que nunca llegó a realizarse. Fue el propio Browder quien, años después, escribió un libro sobre el tema.

En 1966 presenta los exámenes orales que le permiten obtener la maestría. Después de esto es el momento de buscar un tema y un asesor de doctorado. En 1967 conversa con Bill Browder, quien le propone como proyecto de tesis realizar el invariante de Browder-Livesay.

Este invariante está asociado al estudio de estructuras exóticas en ciertas variedades. Hasta el momento no se conocía ningún ejemplo en el cual este invariante no fuera trivial. Santiago decide tomar el proyecto en sus manos.

Los antecedentes al problema empiezan con el trabajo de John Milnor en un artículo publicado en la revista *Annals of Mathematics* (ver [6]), este trabajo revolucionó la topología diferencial de ese entonces. Milnor demostró que la esfera de dimensión siete admite diferentes estructuras diferenciales. En otras palabras, hay variedades que son topológicamente equivalentes a la esfera de dimensión siete, pero no son difeomorfas. A estas variedades se les llaman esferas exóticas. Posteriormente, en 1963, Milnor generalizó el resultado para todas las esferas de dimensión 4k + 3. En 1963 Stephen Smale demuestra la conjetura de Poincaré para dimensiones mayores que cuatro, y nuevamente Milnor, junto con Kervaire, nos regalan un artículo de importancia sobre el estudio del grupo de las clases de difeomorfismo de estructuras diferenciables en las esferas $S^n$, debiera mencionar que en este artículo se utiliza el método de cirugía sugerido por René Thom. Por último, debemos mencionar el trabajo hecho por Novikov y Browder, quienes generalizan el trabajo de Milnor y Kervaire a variedades simplemente conexas.

El índice de Browder-Livesay nos permitía pasar a estudiar ejemplos de variedades que no fueran simplemente conexas. En ese momento sólo se conocían casos triviales, es decir cuando este índice es cero. El trabajo de tesis de Santiago consistió en dar toda una familia de casos donde este índice era distinto de cero y que además admitían estructuras exóticas. Más precisamente, demostró que había una infinidad de involuciones diferentes en la esfera de dimensión $4n + 3$, con la propiedad de que no había puntos fijos. Las involuciones dadas no eran diferenciablemente equivalentes a la antípoda. Esto implica que hay una infinidad de variedades homotópicas al espacio proyectivo real de dimensión n, que no son difeomorfas entre sí. Informalmente, podríamos decir que en el espacio proyectivo real hay una infinidad de estructuras diferenciables, mientras que en las esferas hay un número finito. Esto apareció publicado en el Boletín de la Sociedad Matemática Americana, véase [1].

Éste junto con otros resultados posteriores sobre el tema, fueron publicados en un libro de la prestigiada editorial Springer-Verlag, véase [2].

## El regreso a México

Santiago regresa a México en el año de 1968, justamente después de la masacre del 2 de Octubre. Inmediatamente se incorpora al Instituto de Matemáticas y a su trabajo como investigador y profesor en la Facultad de Ciencias. Desde ese entonces ha impartido cursos en forma continua, y muy pocas veces ha suspendido su labor docente. No creo exagerar al afirmar que una gran mayoría de los matemáticos activos en el presente han cursado alguna materia con Santiago. Indudablemente él ha sido un factor importante en la formación de muchos matemáticos del presente y lo es de muchos futuros matemáticos. Cabe mencionar que en 1969 fue electo presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, cargo que desempeño hasta el año 1973.

Desde el punto de vista de la investigación, Santiago empieza en México a trabajar sobre el problema de encontrar nudos invariantes para involuciones, sin puntos fijos, de esferas de dimensión 4k, con k mayor que uno. La situación en el resto de los casos es clara ya que el invariante de Browder-Livesay nos da la respuesta al problema. Uno de los resultados principales que obtiene, consiste en probar que para una involución dada en una esfera de dimensión 4k, ésta admite un nudo invariante simple. Santiago presentó este trabajo en el congreso internacional de matemáticas, que se realizó en la ciudad de Niza, Francia en 1970.

Debo mencionar que uno puede presentar un trabajo en el congreso sólo por invitación, esto nos da una indicación del reconocimiento que tuvo a nivel internacional el trabajo de Santiago, y él es el único matemático mexicano que ha tenido este privilegio.

Es el momento de comentarles una anécdota que escuché de su propia voz. Al final de la conferencia en el congreso de Niza, cuando todavía se encontraba conversando con algunos de los asistentes a su charla, Bill Browder, su asesor de doctorado, empezó a bajar las escaleras del auditorio con pasos grandes y ruidosos, al tiempo que decía: "That's bullshit, that's bullshit! ". Santiago empezó a explicarle con calma lo que había expuesto en su conferencia. Bill Browder lo escuchó con atención, y al darse cuenta de la certeza de los argumentos, empezó a decir mientras se retiraba: "you son of a bitch, you son of a bitch ". Conclusión, con el "padre" uno nunca puede estar tranquilo.

En la segunda conferencia sobre grupos de transformaciones, realizada en 1971 en la ciudad de Amherst, Massachusetts, Estados Unidos, Santiago discute el problema de clasificar automorfismos de variedades cerradas por cobordismo. Recordemos que dos variedades son cobordantes si hay una variedad compacta cuya frontera consista de las dos variedades dadas. Bill Browder sugirió extender esta definición al caso de variedades con automorfismos. En su artículo, Santiago define un invariante, la estructura isométrica, y conjetura que éste determina la clase de cobordismo para automorfismos de ciertas variedades. Ahí mismo, prueba que la conjetura es cierta para algunos casos. M. Kreck probó posteriormente que el invariante de Santiago, junto con los invariantes clásicos de cobordismo, dan la respuesta definitiva.

## Teoría de catástrofes

A principios de los setentas, René Thom propuso una teoría de catástrofes que atrajo la atención de muchos matemáticos, y también de muchos que no eran matemáticos. Esta teoría, se pensaba, podría ser utilizada para modelar diversos fenómenos, entre ellos los sociales y estaba muy relacionada con la teoría de singularidades y sistemas dinámicos. Santiago es uno de los matemáticos que se ve envuelto en esta propuesta. Así, empieza a estudiar esta teoría y se involucra con la Teoría de Singularidades y Sistemas Dinámicos. Varios estudiantes de aquella época escribieron sus tesis sobre este tema. Algunos de ellos, así como otros de generaciones posteriores, realizaron sus tesis doctorales en el extranjero con algunos de los expertos en el área.

Santiago impartió por primera vez el curso de Teoría de Singularidades en la Facultad, y dio origen a unas excelente notas escritas en colaboración con Radmila Bulajich que fueron publicadas por el departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM y por Aportaciones Matemáticas.

Como consecuencia de todo este trabajo, surge el grupo de singularidades que ha producido diversos artículos durante su trayecto.

Además, estos años de estudio tuvieron diferentes frutos en años posteriores: trabajos de Biomatemáticas, la solución de un problema de E.C. Zeeman y toda una línea de trabajo en torno al Lema de Morse, de lo cual hablaremos más tarde.

## La enseñanza

Durante estos años, Santiago se involucra con el problema de la enseñanza en matemáticas. El surgimiento de los Colegios de Ciencias y Humanidades de la UNAM, los CCH's, abre la esperanza de una enseñanza nueva, la idea era convertir al estudiante en un sujeto activo en el aprendizaje del conocimiento. Santiago es invitado a participar y acepta el compromiso de asesorar a profesores de matemáticas. Es él quien desarrolla los programas de matemáticas y escribe diversos folletos que son distribuidos entre los profesores y estudiantes. La utilidad de esos folletos ha sido de tal importancia que en la actualidad son utilizados por los nuevos profesores de las preparatorias del DF. En la Facultad, Santiago impartió seminarios de enseñanza de las matemáticas, y los profesores de los CCH's asistían a estos seminarios que formaban parte del programa de la carrera de matemáticas. Es una pena que la universidad, por diversos intereses políticos, no haya sostenido esta dinámica de participación de los profesores y estudiantes en los planteles de los CCH's.

## Cuádricas y el regreso a la topología diferencial

A partir del año de 1983 se organizó en el Instituto de Matemáticas un seminario de sistemas dinámicos, en ese entonces habían regresado varios estudiantes de su doctorado, y varios de ellos trabajan en este área. Algunos problemas de investigación surgieron de aquel seminario.

En ese entonces yo era estudiante y becario del Instituto de Matemáticas. En una tarde soleada, me encontraba en la sala de profesores del Instituto tomando un rico café. Como era usual, llegaron los participantes del seminario y empezaron a conversar sobre algunos de las preguntas que surgieron en la sesión del día. De repente, Santiago se paró de su asiento y sin mediar palabra escribió una ecuación en el pizarrón. Todos nos quedamos en silencio, no sabíamos que estaba pasando y fue Alberto Verjovsky quien observó que la ecuación en el pizarrón daba respuesta a una de las preguntas que estaban a discusión. Después aprendí que Santiago era así con algunos compañeros, conmigo lo había sido, y con Alberto continúa haciendo lo mismo.

A partir de aquellas preguntas, Santiago trabajó en la caracterización diferenciable de las variedades que se obtienen como intersección de dos cuádricas homogéneas, simúltanemente diagonalizables, en posición general en $R^n$, ver [4]. Este problema aparece en la teoría de sistemas dinámicos holomorfos y su solución se aplica al análisis de los posibles sistemas en el dominio de Siegel, véase [3]. De esta problemática surgió también una construcción de variedades compactas complejas no simplécticas, en colaboración con Alberto Verjovsky.

## Variaciones sobre el Lema de Morse

A partir de un problema inverso de la ecuación del calor, planteado por Salvador Pérez Esteva, investigador del Instituto, surgieron una serie de problemas que en realidad se han convertido en un proyecto de trabajo que Santiago, junto con otros colaboradores, están desarrollando. Por nombrarlo de alguna forma, llamaremos a este proyecto variaciones sobre el Lema de Morse, el nombre lo tomo de la plática que Santiago dictó dentro del festejo de los sesenta años del Instituto de Matemáticas.

Podríamos decir que este proyecto engloba muchos temas que son aparentemente distintos. Sólo mencionaré algunos de estos temas ya que próximamente aparecerá un artículo panorámico de Santiago, explicando en forma más general este proyecto, en las memorias del sesenta aniversario del Instituto de Matemáticas. El lector impaciente puede ver el artículo de Santiago y Marc Chaperon [5], en donde se explican algunos aspectos de esta problemática.

Además, este artículo contiene varias de las referencias que son frutos de este proyecto.

1. El primer tema es el comportamiento asintótico de las áreas y vólumenes encerrados por las superficies de nivel de una función cerca de un mínimo. Algunos artículos en colaboración con Salvador Pérez han sido publicados.
2. Después tenemos los periódos de órbitas de Sistemas Hamiltonianos cerca de un punto de equilibrio. Este es un tema que ha permitido desarrollar varios artículos de investigación. Santiago ha tenido dos colaboradores en este punto, Marc Chaperon y Salvador Pérez.
3. Por último, las condiciones mínimas de diferenciabilidad en el Lema de Morse y sus generalizaciones. Aquí ha colaborado con Shirley Brombey, de la UAM Iztapalapa.

El tiempo se viene encima, nos vemos obligados a terminar en este punto. Nos faltó mucho por decir en este última parte, mi única disculpa es la próxima aparición del artículo expositorio de Santiago que mencioné al principio de esta sección.

Una última sugerencia: busca a Santiago con cualquier pretexto y disfruta de la sencillez de uno de los personajes de la matemática mexicana que ha dejado sin duda alguna una profunda huella en ella.

## Referencias


[1] Santiago López de Medrano. Involutions of homotopy spheres and homology 3-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.), 73:727–731, 1967.

[2] Santiago López de Medrano. *Involutions on manifolds.* Springer-Verlag, New York, 1971.

[3] Santiago López de Medrano. The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field. In *Holomorphic Dynamics,* México, 1986, volume 1345 of Lectures notes in mathematics, pages 233–245. Springer Verlag, 1988.

[4] Santiago López de Medrano. Topology of the intersections of quadrics. In *Algebraic Topology,* Arcata, CA, 1986, volume 1370 of Lectures notes in mathematics, pages 280–292. Springer Verlag, 1989.

[5] Santiago López de Medrano y Marc Chaperon. Áreas, volúmenes y periodos de órbitas. In XXVII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, volume 16 of Serie comunicaciones, pages 79–95, 1995.

[6] John Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.* (2), 64:399–405, 1956.

SMM

# Durante el XXXV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana

a celebrarse del 6 al 11 de octubre del presente, en la ciudad de Durango, se llevarán a cabo 5 Sesiones Especiales de Reciprocidad con la SMM. Los invitados para dictar pláticas de investigación e interés general son:

**Sesión Especial SMM - American Mathematical Society (AMS):**
Carlos Kenig, University of Chicago
Thomas Farrell, University of Binghampton
Luis Verde Star, UAM-Iztapalapa
Meral Tosun, IMUNAM-Cuernavaca

**Sesión Especial SMM - Real Sociedad Matemática Española (RSME):**
Carlos Andradas, Universidad Complutense de Madrid
Blas Torrecillas, Universidad de Almería
Francisco Raggi, IMUNAM

**Sesión Especial SMM - Sociedad Portuguesa de Matemáticas (SPM):**
José Francisco Rodrígues, Universidad de Lisboa (No Confirmado)
Adelia Sequeira, Instituto Superior Técnico, Lisboa
Jorge Nuno Silva, Universidad de Lisboa
Alejandro Díaz Barriga, IMUNAM
Juan José Rivaud, CINVESTAV-IPN y UAM-I

**Sesión Especial SMM - Sociedad Boliviana de Matemática (SoBolMat):**
Santiago Sologuren, Universidad Católica Boliviana y Universidad Privada Boliviana
Jimmy Santamaría Torrez, Instituto Normal Superior Simón Bolivar
Efraín Cruz, Universidad Mayor de San Andrés
Eugenio Garnica Vigil, Facultad de Ciencias-UNAM
Ricardo Berlanga, IIMAS
Enrique Farías, Universidad de Colima

# Aquí tenemos a dos de los mejores matemáticos mexicanos

**Santiago López de Medrano y Francisco González Acuña.**

**"El Comité Editorial de la Carta Informativa agradece la colaboración para la realización de este número de:**

**Imelda Paredes, Gabriela Artígas (del Depto. de Difusión del IMUNAM, C.U.) Adriana Briseño, Miguel Ángel Magaña (IMUNAM, Morelia)**

# ANUNCIOS

*Si desea que anunciemos en este espacio*
*algún encuentro académico,*
*por favor escriba a la siguiente dirección:*

**anunciosci@smm.org.mx**

## Congreso Latinoamericano de Biomatemática

**Noviembre 25-28**
**Sede: Cimat, Guanajuato**

**Temas: epidemiología, evolución, ecología, neurofisiología, filosofía de la biología, macromoléculas, reacción difusión, evolución.**

**Patrocinadores:** **IMP, Rectoría UAM Iztapalapa,**
**DCBI UAM Iztapalapa,**
**Departamento de Matemáticas UAM Iztapalapa,**
**CIMAT A.C., SMTC-CINVESTAV, FENOMEC**

**INFORMES; www.alab.cl**

## Third International Conference Multivariate Approximation: Theory and Applications

**Cancun, Mexico april 24-29, 2003**

**Informations:**
**http://lmi.insa-rouen.fr/~mata2003/**
**deadline for submission: Jan. 31 - 2003**


CARTA INFORMATIVA
SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 34,
Septiembre de 2002

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. 5622-4481 / 82
Fax 5622-4479
smm@smm.org.mx





**DISEÑO Y PRODUCCIÓN**

S y G editores, SA de CV
Tels. 5619-5293 / 5617-5610
syg@att.net.mx

**PORTADA**
Cuadro “El Matemático”. Copia de la Obra de Diego Rivera. Pintora: Ana María Regueiro. Donado por el Dr. Federico O’Reilly Togno con motivo del LX aniversario del Instituto de Matemáticas.