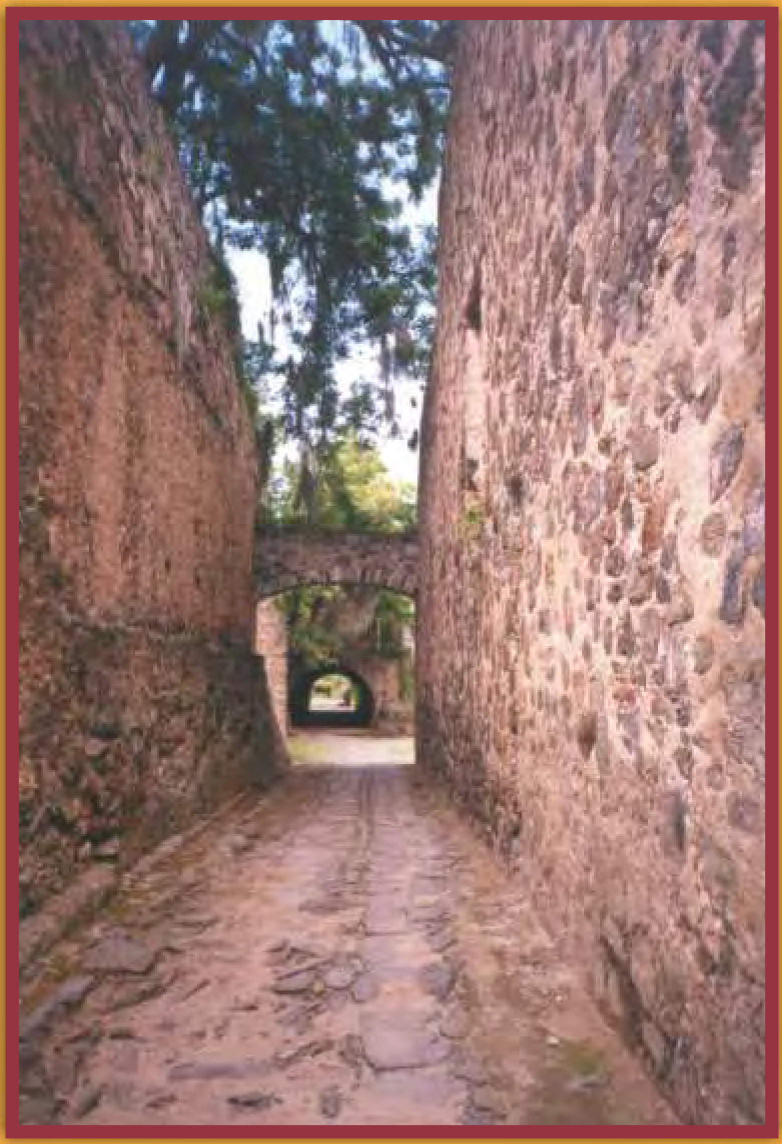
CARTA INFORMATIVA

Julio 2003



- Teoría K
- Ecuaciones de Navier-Stokes
- Pachuca sede del XXXVI Congreso Nacional de la SMM

Teoría K

Daniel Juan Pineda
Instituto de Matemáticas, UNAM, Unidad Morelia
(daniel@matmor.unam.mx)

La Teoría K surge en la década de los 60 como una herramienta para formular *algebraicamente* fenómenos topológicos y/o geométricos. Por ejemplo el estudio de haces sobre espacios adquiere aspectos algebraicos al interpretarlos como elementos de un grupo (ver §3). Sin embargo las técnicas y los frutos obtenidos permitieron que la Teoría K se ramificara hacia una gran cantidad de áreas de las matemáticas. En muy diversas áreas se ha vuelto una herramienta formidable, no sólo para algebrizar la geometría o la topología, sino también *geometrízar o topologizar el algebra.* Actualmente es imposible dar una definición única de teoría K, sin embargo, en este trabajo veremos la profunda relación que puede haber entre (aparentemente) diversas áreas de las matemáticas en el contexto de Teoría K.

1. Teoría K-algebraica

Los ingredientes son los siguientes: consideremos R un anillo asociativo con unidad, definimos $K_1(R)$ como la abelianización del grupo general lineal, $GL(R)$, visto como la unión $GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset GL_3(R) \subset \cdots$ via las inclusiones

$$A \hookrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, $K_1(R)$ resulta ser un grupo abeliano y la asignación $R \mapsto K_1(R)$ *es* funtorial. Los siguientes son algunos ejemplos de lo que se obtiene: si R es un campo $K_1(R) = R^*$ son las unidades del campo, para $R = \mathbb{Z}$ (el anillo de los enteros), $K_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, para el anillo de grupo $\mathbb{Z}C_5$ (C_5 es el grupo cíclico de orden 5), $K_1(\mathbb{Z}C_5) = \mathbb{Z}/2 \times C_5 \times \mathbb{Z}$.

Para definir $K_0(R)$ procedemos como sigue, sea $\mathfrak{P}(R)$ la categoría de módulos proyectivos y finitamente generados sobre R (un R-módulo P es proyectivo si existe un R-módulo Q tal que $P \oplus Q \sim R^n$ para alguna n). Ahora tomemos la categoría $Iso(\mathfrak{P}(R))$ cuyos objetos son las clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados, sobre R. La suma directa en $Iso(\mathfrak{P}(R))$ le propociona la estructura de semigrupo, ahora aplicamos la construcción universal de Grothendiek que nos completa un semigrupo a un grupo (de igual forma que obtenemos los enteros del semigrupo de los números naturales), al grupo completado de $Iso(\mathfrak{P}(H))$ se le conoce como $K_0(R)$. Veamos algunos ejemplos de lo que se obtiene con este proceso: si R es un campo, $K_0(R) = \mathbb{Z}$ (puesto que los R módulos finitamente generados coinciden con los espacios vectoriales de dimensión finita y la dimensión es un invariante completo, el isomorfismo está dado por la dimensión del espacio), si R *es* un dominio de ideales principales $K_0(R) = \mathbb{Z}$ aquí el isomorfismo viene dado por el rango del módulo. Como anteriormente, la asignación $R \mapsto K_0(R)$ es funtorial. Observemos que los módulos libres R^n son proyectivos y están clasificados por su rango n. Por tanto tenemos un morfismo $i : \mathbb{Z} \to K_0(R)$. Definimos $\widetilde{K}_0(R)$ como el cociente $K_0(R)/i(\mathbb{Z})$.

Existen definiciones algebraicas para $K_2(R)$ y $K_3(R)$, también para $K_i(R)$, para $-\infty \leq i \leq -1$, hubo intentos usando solamente álgebra para obtener definiciones adecuadas de lo que debiera ser $K_i(R)$, para $i > 3$, sin embargo fue hasta 1972 que Quillen [4] logra una definición satisfactoria. La herramienta necesaria para ésto fue la Teoría de Homotopía. La idea fundamental es que los grupos $K_i(R)$ se pueden definir como grupos de homotopía $\pi_i(\mathbb{K} R_i)$, donde $\mathbb{K} R_i$, es un espacio topológico completamente determinado por R, y $\pi_i(\ )$ es el i-ésimo grupo de homotopía. Estas definiciones tienen la propiedad de que coinciden con las definiciones de $K_1(R)$ y $K_0(R)$ de arriba y proporcionan, además de una definición apropiada para $K_i(R)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, permitiendo la introducción de poderosas herramientas de la topología algebraica. El cálculo explícito de $K_i(R)$ es un problema que se ramifica hacia muy diversas y profundas áreas de la matemáticas modernas, ésta es una tarea mayúscula, aún para el anillo más sencillo $R = \mathbb{Z}$, he aquí algo de lo que sabemos sobre estos grupos:

$$K_i(\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty \leq i \leq -1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } i = 1, 2 \\ \mathbb{Z}/48 & \text{si } i = 3 \\ 0 & \text{si } i = 4 \\ A \oplus \mathbb{Z} & A \text{ un grupo finito de orden impar, } i = 5 \\ B & B \text{ un grupo finito de orden impar, } i = 6. \end{cases}$$

En general $K_i(\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano finitamente generado de rango 1 si $i \equiv 1 \ mod\ 4$. Para el caso de un campo finito con q elementos $R = F_q$, Quillen calcula en [5] completamente estos grupos:

$$K_{2n}(F_q) = 0, \quad K_{2n-1} = \mathbb{Z}/(q^n - 1),\ n > 1$$

2. Teoría K-topológica

Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Un haz vectorial sobre X consiste en una terna $\xi = (E, X, p)$ donde E es un espacio topológico, $p : E \to X$ es una función continua con la siguiente propiedad: para cada punto $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ que contiene a x tal que $p^{-1}(U) \cong U \times V$, donde V es un espacio vectorial (real o complejo) de dimensión finita, el homeomorfismo es *compatible* con la proyección natural $U \times V \to U$. Al espacio $V = p^{-1}(x)$ se le llama la *fibra* sobre el punto $x \in X$. Un ejemplo inmediato es el haz *trivial* $(X \times V, X, pr_X)$, con V un espacio vectorial fijo y pr_X la proyección natural. Un haz vectorial puede no ser trivial, por ejemplo: Sean S^1 la esfera unitaria pensada como el intervalo [0, 1] donde hemos identificado los extremos 0 y 1 y $V = \mathbb{R}$. Ahora consideremos el espacio E que se obtiene de identificar en $[0, 1] \times P$ los puntos de la forma $(0, r)$ con $(1, -r)$, es decir:

$$E = ([0, 1] \times \mathbb{R})/(0, t) \sim (1, -t)$$

Definimos

$$p : E \to \mathbb{S}^1 \quad \text{como} \quad p(x, t) = x.$$

Un ejercicio agradable para el lector es verificar que $(E, \mathbb{S}^1, p)$ define un haz vectorial sobre $\mathbb{S}^1$ y que no es trivial (de hecho es un banda de Möebius infinita).

Como en el caso de módulos, dos haces vectoriales $\xi_1 = (E_1, X, p_1)$ y $\xi_2 = (E_2, X, p_2)$ sobre X se pueden sumar fibra a fibra y construir un nuevo haz $\xi_1 + \xi_2 = (E', X, p')$ donde la fibra de E' será la suma directa de las fibras de E_1 y E_2, respectivamente. También tenemos el haz *trivial* 0; donde la fibra consiste del haz trivial 0, a éste le llamamos el haz cero y lo denotamos por $\bar{0}$, tiene la propiedad de que $\xi + \bar{0} = E$ para cualquier haz x sobre X. Observemos que ahora tenemos una suma con neutro en la categoría de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre X. Es decir, nuevamente tenemos un semigrupo, por lo tanto podemos completar éste a un grupo abeliano, a este grupo abeliano se le denota por $K(X)$ y se le conoce como la *Teoría K Topológica* del espacio X. Nuevamente la asignación $X \mapsto K(X)$ es funtorial (aunque ahora es *contravariante)*. Como ejemplo tenemos que si X es un punto, $K(X)$ es precisamente el grupo $\mathbb{Z}$, puesto que haces vectoriales sobre un punto son precisamente los espacios vectoriales de dimensión finita y éstos están clasificados por la dimensión y su completación a la Grothendieck es $\mathbb{Z}$. Como segundo ejemplo tendremos que si $X = \mathbb{S}^2$ la esfera bidimensional y el campo base son los números complejos tendremos que $K(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y el isomorfismo está dado por la dimensión del haz y la clase de Chern del haz, ver [2] pág. 69.

Analicemos algebraicamente nuestros haces. Sea F el campo de los números reales o complejos y X un espacio compacto y Hausdorff. Sea R el anillo de funciones continuas $f : X \to F$, donde la suma y multiplicación están definidas por evaluación. Con esta definición, el cero es la función constante cero y el uno la función constante uno, más aún este anillo R es conmutativo, asociativo y con unidad. Dado un haz vectorial $\xi = (E, X, p)$ sobre X, una sección para ξ, es una función continua $s : X \to E$ tal que $p \circ s = id_X$, ahora consideremos el conjunto $\Gamma(\xi)$, de todas las secciones de ξ: $\Gamma(\xi) = \{s : X \to E|$ es sección de $\xi\}$. Las secciones $s \in \Gamma(\xi)$, localmente constan de dos coordenadas $s(x) = (x, s'(x))$ donde s' es un vector en la fibra sobre x, aprovechando esta observación tendremos que podemos sumar dos secciones usando la segunda coordenada (i.e. usando la suma en las fibras) y esto convierte a $\Gamma(\xi)$ en un grupo abeliano. Más aún, para cada pareja de elementos $f \in R$ y $s \in \Gamma(\xi)$ se tiene la siguiente multipicación $fs(x) = (x, f(x)s'(x))$, es inmediato verificar que esto convierte a $\Gamma(\xi)$ en un R-módulo.

Continuando con nuestro análisis, consideremos el caso especial en que el haz es el haz trivial con fibra F^n, a éste lo denotamos por ε_n. Una sección para ε_n consiste en seleccionar una función continua $s : X \to X \times F^n$ con la propiedad de que $pr_X s(x) = x$, pero $pr_X s(x) = pr_x(x, s_1(x),\ldots, s_n(x)) = x$ donde $s_i(x)$ son n funciones continuas $s_i : X \to F$ (observe que como el haz es trivial, esto es una situación global sobre X). Por lo tanto $\Gamma(\varepsilon_n)$ es precisamente R^n, es decir el R- módulo $\Gamma(\varepsilon_n)$ es libre isomorfo a R^n, así, $\Gamma(\varepsilon_n)$ es proyectivo y finitamente generado.

Ahora consideremos un haz vectorial cualquiera ξ sobre X. De la teoría general de haces, [2] pág. 27, se tiene el siguiente resultado: existe un haz ω sobre X tal que $\xi + \omega = \varepsilon_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. De la discusión en el párrafo anterior tendremos que ¡cualquier haz vectorial ξ sobre X es proyectivo y finitamente generado como R-módulo! Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema:

Teorema 1 (Swan[7]). *Sean X un espacio compacto y Hausforff, R el anillo de funciones continuas de X a F. Entonces se tiene un isomorfismo $K(X) \cong K_0(R)$; es decir es equivalente la teoría K topológica del espacio X a la teoría K algebraica del anillo R.*

3. Teoría K y geometría

Algunos invariantes geométricos de un espacio X con grupo fundamental $G = \pi_1(X)$ tienen lugar en los grupos $K_i(\mathbb{Z}G)$, $i \leq 1$ ($\mathbb{Z}G$ es el anillo entero de grupo del grupo G). Veamos el caso $i = 1$, observemos que G se encaja en $GL(R)$ via las matrices de 1×1: $(\pm g)$, por lo tanto podemos considerar la imagen de G en $K_1(\mathbb{Z})$, al cociente $K_1(\mathbb{Z}G)/G$ se le conoce como el *grupo* de *Whitehead* de G *y* se le denota por $Wh(G)$. Por otro lado, tenemos la noción de h-cobordismo: dada una variedad M^n de dimensión n, un *h-cobordismo* sobre M consta de una variedad W^{n+1} con exactamente dos componentes en su frontera M *y* N *y* con retracciones por deformación $W \to M$ y $W \to N$. Por ejemplo el h-cobordismo trivial para cualquier M es el producto $M \times [0, 1]$. Un pregunta natural que nos viene inmediatamente es ¿existen H-cobordismos que no son productos? Una de las aplicaciones más importantes del grupo de Whitehead es su relación con h-cobordismos cuando $G = \pi_1(M)$:

Teorema 2 (del s-cobordismo). [3] *Sea M^n una variedad con $n \geq 5$ y $G = \pi_1(M)$. Existe una correspondencia* 1 – 1 (*conocida como torsión de Whitehead*) *entre $Wh(G)$ y clases de h-cobordismos sobre M.*

Como aplicaciones del teorema anterior, tendremos que si M^n, $n \geq 5$, es simplemente conexa (*i.e.* $\pi_1(M) = 1$) tendremos que el único h-cobordismo sobre M es homeomorfo a un producto $M \times [0, 1]$. Este fue uno de los resultados principales usados por Smale para probar la conjectura de Poincaré para $n \geq 6$. También tenemos ejemplos donde $Wh(G) \neq 0$, a saber si $G = C_5$, (el grupo cíclico de orden 5), se tiene que $Wh(G) = \mathbb{Z}$, así, por el teorema el s-cobordismo tendríamos que hay una infinidad de variedades h-cobordantes y que no son productos si $\pi_1(M) = C_5$, una parte importante del teorema del s-cobordismo es la existencia de tales variedades para cada elemento $Wh(G)$.

La relación de $K_0(\mathbb{Z}G)$ con las propiedades topológicas de un espacio X tal que $\pi_1(X) = G$ está dada por la *obstrucción* de Wall [6] y es una forma de medir que tan complejo es un espacio en el siguiente sentido: un espacio X es un complejo CW si se puede armar con piezas muy elementales, a saber con discos D^n pegándolos adecuadamente [3]. Si nos proporcionan un espacio X cualquiera, nos preguntamos ¿Es X equivalente a un complejo CW?, aquí, equivalente es entendido en el sentido homotópico. El teorema de Wall nos proporciona una respuesta a esta pregunta. Dado una variedad topológica abierta M^n, $n \geq 6$, ésta define un elemento $[M] \in \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(M))$, ver §1 para la definición de $\widetilde{K}$.

Teorema 3 (Wall). *La variedad abierta M es homotópicamente equivalente a un complejo CW si y solo si $[M] = 0$ en $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1(M))$.*

Las aplicaciones de K_i para $i \leq O$ surgen de estudiar invariantes geométricos como los de arriba en $M \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$.

4. Calculando $K_i(\ )$

Nos concentaremos ahora en el caso de anillos de la forma $R = \mathbb{Z}G$. La pregunta que nos hacemos inmediatamente es ¿qué tanto podemos calcular $K_i(\mathbb{Z}G)$? Existe una amplia literatura para el caso en que G es un grupo finito, por ejemplo, se sabe que son grupos abelianos finitamente generados para todo $i \in \mathbb{Z}$, en algunos casos se sabe exactamente de qué rango son y, por ejemplo para $i = -1$, que solo puede haber 2-torsión, también se sabe que para $i \leq -2$ tenemos $K_i(\mathbb{Z}G) = 0$.

Inmediatamente nos preguntaríamos qué sucede para grupos infinitos, por ejemplo el grupo infinito más sencillo es $G = \mathbb{Z}$. Observemos que el anillo $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ lo podemos identificar con el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes enteros $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Los resultados de Bass-Heller-Swan [6] nos proporcionan una relación entre $K_i(R)$ y $K_i(R[t, t^{-1}])$, que en el caso de $R = \mathbb{Z}$ nos dice que $K_i(R[t, t^{-1}]) = K_i(R) \oplus K_{i-1}(R)$, por lo tanto $K_i(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}])$ es finitamente generado para todo i *y* cero para $i < -1$.

La situación cambia drásticamente para cuando tenemos grupos infinitos con torsión, uno de los ejemplos más sencillos es $G = \mathbb{Z} \times C_2 \times C_2$ (C_2 el grupo cíclico de dos elementos), en este caso tenemos que ¡$K_0(\mathbb{Z}[G])$ contiene un grupo abeliano de 2-torsión que es infinitamente generado! Sin embargo también se tiene que $K_i(\mathbb{Z}[G]) = 0$ para $i < -1$. Esto sugiere la siguiente:

Conjetura 1 (W. Hsiang). *Cualquier grupo G finitamente presentado satisface* $K_i(\mathbb{Z}G) = 0$ *para* $i < -1$.

Existen pruebas de esta conjetura para familias de grupos pero aún es un problema abierto en la generalidad que se propone.

De los ejemplos mencionados anteriormente, podemos observar que la presencia de elementos de orden finito en el grupo puede cambiar sustancialmente la naturaleza de los K-grupos del correspondiente anillo de grupo. También hemos mencionado el papel de los K grupos en relación con invariantes geométricos de un espacio X, con el grupo fundamental como el grupo en cuestión. Es por lo tanto de esperarse que propiedades geométricas X se vean reflejadas en $K_i(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$ (y viceversa). Mencionaremos un ejemplo de esto:

Teorema 4. *Sean M una variedad hiperbólica de dimensión* $n \geq 5$ *y* $G = \pi_1(M)$. *Entonces se tiene que*

$$Wh(\mathbb{Z}[G]) = \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]) = K_i(\mathbb{Z}[G]) = 0, \text{ para } i \leq -1.$$

Nuevamente, la evidencia e intuición ha llevado a la siguiente

Conjetura 2 (Borel). *Sea G un grupo discreto sin elementos (no triviales) de orden finito. Entonces*

$$Wh(\mathbb{Z}[G]) = \widetilde{K}_0(\mathbb{Z}[G]) = K_i(\mathbb{Z}[G]) = 0, \text{ para i} \leq -1.$$

Como anteriormente, se ha verificado esta conjetura para algunas familias de grupos discretos, pero continúa abierta en la generalidad descrita.

En caso de tener un grupo discreto, infinito y con elementos de orden finito, existen algunos grupos Fuchsianos (subgrupos discretos de $SL_2(\mathbb{R})$) que satisfacen que tanto $Wh(G)$, $\widetilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$ como $K_{-1}(\mathbb{Z}G)$ son no nulos [1].

5. ¿Otras $K_i(\ )$?

Cuando X es un espacio topológico podemos extender la definición de $K(X)$ a $K^i(X)$ para $i \geq 1$, con esto conseguimos una colección de grupos $K^i(X)$ para todo $i = 0, 1, 2, \cdots$. Esto constituye lo que hoy se denomina una *Teoría de Cohomología extraordinaria* y ha ayudado a estudiar fenómenos geométricos que con la teoría usual de cohomología no se podían considerar. Además fue el primer ejemplo de una teoría de cohomología paralela a la teoría singular. La teoría K-topológica tiene la siguiente propiedad fundamental:

Teorema 5 (Periodicidad de Bott). [2] *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff, entonces se tiene*

$$K^i(X) \cong K^{i+2}(X) \text{ para } i \geq 0.$$

En la actualidad también se definen $K_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ cuando X es una variedad algebraica, aunque las ideas de su construcción son similares a las que hemos descrito, los fenómenos geométrico-algebraicos involucrados son de una riqueza y complejidad extraordinaria y merecen un capítulo especial.

La creación de los distintos grupos K descritos ha marcado pautas importantes en el desarrollo de las matemáticas modernas. En más de una ocasión las ideas, técnicas usadas y/o problemas resueltos con las técnicas de teoría K han sido merecedoras de la Medalla Fields: desde Atiyah en 1966 con la creación de la Teoría K-topológica, pasando por Grothendieck y Smale en ese mismo año, Quillón en 1978 y recientemente Voevodski en 2003.

References

[1] E. Berkove, D. Juan Pineda y K. Pearson, *The lower algebraic K-theory of fuchsian groups,* Comm. Math. Helv. 76 (2001) 1-15.

[2] M. Karoubi, *K-Theory.* Springer-Verlag 1978.

[3] J. Milnor, *Whithehead Torsión,* Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 358-426.

[4] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Algebraic *K*-theory I (Battelle, 1972) (H. Bass, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1973, págs. 85-147.

[5] D. Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, Ana. of Math. 96 (1972), 552-586.

[6] J. Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications.* GTM 147, Springer-Verlag 1994.

[7] R. Swan, *Vector bundles and projective modules,* Trans. of the AMS 105 264-277 (1962).

El misterio de las ecuaciones de Navier-Stokes

Pavel Naumkin
Instituto de Matemáticas, UNAM.
pavelni@matmor.unam.mx

En el principio del tercer milenio el Instituto Clay de Matemáticas (Cambridge, MA, USA) anunció un fondo económico como premio para quien resuelva el importante problema de la matemática contemporánea sobre la existencia global de soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Cabe señalar que la regularidad (o suavidad) del flujo de un líquido tres dimensional está entre los problemas clásicos más importantes junto con la hipótesis de Riemann y la conjetura de Poincaré (véase [2], [17]). Describimos en la forma precisa este problema (véase la dirección en Internet: http://www.claymath.org/ Millennium_Prize_Problems/).

Consideramos el sistema de las ecuaciones de Navier-Stokes en todo el espacio $\mathbf{R}^3$**;**

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u,\nabla)u + \nabla p = \nu\Delta u + f, \tag{1}$$

$$div\, u = 0 \tag{2}$$

donde el vector de la velocidad del flujo $u(t, x) = (u_i(t, x))_{i=1,2,3} \in \mathbf{R}^3$ y la presión dentro del líquido $p(t, x) \in$ R son incógnitas, definidas en la posición $x \in \mathbf{R}^3$ y en el tiempo $t \geq 0$. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de los líquidos incompresibles newtonianos (véase [11]) y tienen gran importancia en la física matemática moderna, lo mismo que otras ecuaciones fundamentales tales como ecuaciones de Schrodinger y Maxwell.

Para plantear el problema de Cauchy para el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes necesitamos considerar la condición inicial

$$u\,(0, x) = u^0(x), \tag{3}$$

donde los valores iniciales $u^0(x)$ son dados y forman un campo vectorial liso en $\mathbf{R}^3$, tal que $div\, u^0(x) = 0$ para todos los $x \in \mathbf{R}^3$. En todo el texto, liso significa infinitamente diferenciable. El vector $f(t, x) = (f_i(t, x))_{i=1,2,3} \in \mathbf{R}^3$ define una fuerza externa (por ejemplo, la dada por la gravitación). El parámetro $\nu > 0$ es fijo y denota el coeficiente de viscosidad. El operador gradiente ∇, la divergencia $div\, u \equiv (\nabla, u)$ y el operador de Laplace $\Delta = \nabla^2$ actúan con respecto a las coordenadas espaciales.

La primera ecuación (1) en el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes expresa un balance de las fuerzas que actúan conforme la segunda ley de Newton suponiendo que la densidad del líquido es constante. La segunda ecuación (2) representa la restricción de la incompresibilidad del líquido. El parámetro $\nu > 0$ caracteriza la viscosidad del líquido, se supone que la viscosidad no varía con el tiempo ni la posición. En muchas aplicaciones prácticas el valor ν es relativamente pequeño 10^{-2}, 10^{-3}.

También se pueden considerar descripciones más reales, cuando el líquido ocupa un volumen acotado $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. En este caso es necesario agregar al problema (1) – (3) condiciones de frontera $u(t, x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, que quiere decir que el líquido está pegado al contenedor y por lo tanto no se mueve en la frontera $\partial\Omega$. Restringimos nuestra consideración al caso de todo espacio el $\mathbf{R}^3$ para no tener dificultades adicionales con la influencia de la frontera.

Por razones físicas se restringe la atención a los datos iniciales $u^0(x)$ y fuerzas $f(t, x)$ rápidamente decrecientes en el infinito, *i.e.* se supone que las funciones $u^0(x)$ y $f(t, x)$ junto con todas sus derivadas decaen más rápido que cualquier potencia de la $\|x\|$.

Vamos a llamar a una solución del problema (1)-(3) físicamente aceptable, si esta solución es global con respecto al tiempo, lisa y tiene energía finita, más precisamente si las funciones $u(t, x)$ *y* $p(t, x)$ son infinitamente diferenciables con respecto a todo tiempo $t \geq 0$, a todo punto en el espacio $x \in \mathbf{R}^3$ y tales que la energía es acotada

$$\int_{\boldsymbol{R}^3} |\, u(t, x)\,|^2 \; dx < \infty \tag{4}$$

para todo tiempo $t \geq 0$.

Un problema fundamental en teoría de ecuaciones no lineales en derivadas parciales es la existencia global de soluciones lisas con energía finita para las ecuaciones de Navier-Stokes. De modo concreto es necesario demostrar una de las dos afirmaciones siguientes (véase [7]):

(A) Existencia de soluciones lisas para ecuaciones de Navier-Stokes en $\mathbf{R}^3$. Sea $u^0(x)$ cualquier campo vectorial liso, rápidamente decreciente tal que $div\, u^0(x) = 0$, suponiendo también que $f(t, x) \equiv 0$: demostrar que existe una solución única físicamente aceptable $u(t, x)$, $p(t, x)$ para el problema de Cauchy (1) - (3).

(B) Destrucción de soluciones para ecuaciones de Navier-Stokes en $\mathbf{R}^3$. Demostrar que existen un campo vectorial $u^0(x)$ liso, rápidamente decreciente, tal que $div\, u^0(x) = 0$, y una función fuente $f(t, x)$ lisa, rápidamente decreciente; para los cuales no existe ninguna solución físicamente acceptable $u(t, x)$, $p(t, x)$ para el problema de Cauchy (1) - (3).

Observamos que solo una de las afirmaciones (A) o (B) será posible.

Por otro lado, para no tener dificultades con el decaimiento de las soluciones en el infinito, se puede considerar el problema (1) con valores iniciales y la fuerza externa periódicas, *i.e.* que satisfacen:

$$u^0(x + e_j) = u^0(x), f(t,\, x + e_j) = f(t,\, x) \text{ para } 1 \leq j \leq 3, \tag{5}$$

donde e_j es el j-ésimo vector unitario en $\mathbf{R}^3$. Entonces cambiamos la geometría de $\mathbf{R}^3$ por la del toro $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$. En este caso se pide que los valores iniciales u^0 deben ser lisos (infinitamente diferenciables) y la función fuente $f(t, x)$ lisa, rápidamente decreciente con respecto al tiempo.

Decimos que una solución es físicamente aceptable para el problema periódico (1) - (3) si las funciones $u(t, x)$ y $p(t, x)$ son infinitamente diferenciables con respecto al tiempo $t \geq 0$, al espacio $x \in \mathbf{R}^3$ y periódicas con respecto a las coordenadas espaciales $u(t, x + e_j) = u(t, x)$, $p(t, x + e_j) = p(t, x)$ para $1 \leq j \leq 3$ y para todos los valores de $x \in \mathbf{R}^3$, $t \geq 0$.

La dicotomía (A) - (B) se formula similarmente para el caso de las soluciones periódicas.

($\mathbf{A}_p$) Existencia de soluciones periódicas para ecuaciones de Navier-Stokes en $\mathbf{R}^3$. Sea $u^0(x)$ cualquier campo vectorial, liso, tal que $div\, u^0(x) = 0$ y satisface la condición de periodicidad (5). Demostrar que existe una única solución físicamente aceptable $u(t, x)$, $p(t, x)$ para el problema periódico (1) - (3).

($\mathbf{B}_p$) Destrucción de soluciones periódicas para ecuaciones de Navier-Stokes en $\mathbf{R}^3$. Demostrar que existe un campo vectorial $u^0(x)$ liso, tal que $div\, u^0(x) = 0$, satisface la condición de periodicidad (5), y también que existe una función fuente $f(t, x)$ lisa, rápidamente decreciente en tiempo, para los cuales no existe ninguna solución físicamente aceptable $u(t, x)$, $p(t, x)$ para el problema periódico (1) - (3).

La historia de las ecuaciones de Navier-Stokes tiene más de cien años. La teoría de la Hidrodinámica siempre llamaba la atención de científicos de distintas áreas. La claridad de sus experimentos, la simplicidad de las ecuaciones básicas y la precisión de los problemas daba esperanza de obtener una descripción completa de los fenómenos hidrodinámicos que ocurren en los medios líquidos, aunque en realidad la simpleza de los problemas resultó una ilusión. Hasta hoy no se han contestado las principales preguntas: ¿existen las soluciones únicas físicamente aceptables para las ecuaciones de la hidrodinámica? y ¿cuál es la precisión en la descripción de los procesos reales? Notamos que estas preguntas no son simples y no son nuevas. Obviamente esto es uno de los problemas más importantes en la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Hasta el momento la riqueza de los métodos matemáticos y poderosas super computadoras resultan ser no suficientes para contestar estas preguntas.

Mencionamos algunos resultados conocidos para la teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Consideremos los grupos de simetría para soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Sea $p(t, x)$, $u(t, x)$ una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes entonces las siguientes transformaciones también nos dan una solución:

1) La invariancia Galileana: para cualquier vector constante $c \in \mathbf{R}^3$, el par

$$u(t, x - ct) + c,$$
$$p(t, x - ct)$$

también es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

2) La simetría rotacional: para cualquier matriz ortogonal Q (i.e. con $Q^T = Q^{-1}$) el par

$$Q^T u(t, Qx)$$
$$p(t, Qx)$$

también es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes. La propiedades 1) y 2) se cumplen debido a isotropía de las leyes físicas en el espacio $\mathbf{R}^3$. 3) Transformación de la escala: para cualquier $\tau > 0$ el par

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}u\left(\frac{t}{\tau}, \frac{x}{\sqrt{\tau}}\right),$$
$$\frac{1}{\tau}p\left(\frac{t}{\tau}, \frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

también es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Observarnos que usando la condición $div\, u = 0$ se puede expresar la presión $p(t, x)$ explícitamente en términos de la velocidad. En efecto, aplicando el operador div a la primera ecuación en (1) obtenemos $\Delta p = -(\nabla, (u, \nabla)u)$, de donde $p = -\Delta^{-1}(\nabla, (u, \nabla)u)$. Como es bien conocido el operador Δ^{-1} se escribe usando la integral de Poisson (véase [6]) como:

$$p = -(4\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|x - y|}(\nabla, (u, \nabla)u)dy.$$

Entonces el valor de la presión $p(t, x)$ en un punto $x \in \mathbf{R}^3$ depende de los valores de la velocidad en todo el espacio $\mathbf{R}^3$, por lo que las ecuaciones de Navier-Stokes son no lineales y no locales. Esto explica porqué las ecuaciones de Navier-Stokes son muy difíciles en su estudio analítico.

En ausencia de las fuerzas externas ($f \equiv 0$), la energía cinética del fluido $\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3}|u(t, x)|^2 dx$, que representa la norma de la solución en el espacio de Lebesgue $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$, decae con el tiempo. En efecto, multiplicando la ecuación de Navier-Stokes por $u(t, x)$ e integrando sobre todo espacio $\mathbf{R}^3$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^3} |u(t, x)|^2\, dx + 2\nu\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u(t, x)|^2\, dx = 0.$$

Como el segundo término en esta ecuación es positivo, esto implica que la derivada con respecto al tiempo de la energía cinética es negativa. En otras palabras, si la solución tiene energía cinética finita en el tiempo inicial, entonces la energía cinética se preserva acotada para siempre. Matemáticamente esta propiedad se expresa como una estimación *a priori* de la norma $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ de la solución

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)} \leq \|u^0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)} \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{6}$$

Por razonamientos físicos las soluciones con la energía cinética finita en el tiempo inicial deberían existir para siempre y decaer a cero cuando el tiempo pasa a infinito $t \to \infty$. Desafortunadamente la estimación *a priori* (6) no es suficiente para demostrar la existencia global de las soluciones clásicas y por el momento no sabemos ninguna otra información cualitativa más fuerte en el caso general (sin simetrías adicionales). El primer trabajo sobre soluciones globales para ecuaciones de Navier-Stokes fue hecho por Leray [12], donde obtuvo un progreso importante considerando las soluciones generalizadas (o débiles). Leray aplicó la cota de la energía cinética (6) para construir soluciones generalizadas con energía cinética finita, que existen para todo tiempo. Las soluciones generalizadas se obtienen multiplicando la ecuación diferencial por una función de prueba $\phi(t, x)$ infinitamente diferenciable con soporte compacto en $(0, \infty) \times \mathbf{R}^3$ e integrando por partes para pasar todas las derivadas a la función de prueba. Entonces en lugar de las ecuaciones de Navier-Stokes se considera la siguiente ecuación integral

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^3} (-(u, \phi_t) - (u, (u, \nabla)\phi))dxdt$$
$$= \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^3} (\nu(u, \Delta\phi) + (f, \phi) - p\,div\phi)dxdt. \tag{7}$$

Observamos que la ecuación integral (7) tiene sentido para funciones u, p no lisas, al contrario de las ecuaciones diferenciales (1), es suficiente pedir que $u \in \mathbf{L}^2$ y $p \in \mathrm{L}^1$. El resultado de Leray no es satisfactorio desde el punto de vista físico ya que en este contexto interesan sólo soluciones lisas. Usualmente en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales primero se demuestra la existencia de las soluciones generalizadas y luego se prueba que todas las soluciones generalizadas tienen suavidad. Pero en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes este camino no dio resultados. Estas soluciones tienen una regularidad parcial, pero no se sabe si se convierten en lisas. Y la pregunta sobre regularidad de las soluciones es fundamental para las aplicaciones prácticas. En particular, hasta hoy nadie demostró la unicidad de las soluciones generalizadas de Leray, se considera que esta clase de soluciones generalizadas es demasiado amplia.

Observamos que debido al efecto de suavización (estándar para sistemas parabólicos) se puede pedir que los datos iniciales no necesariamente sean lisos, es suficiente pedir que $u^0(x)$ pertenece a un espacio de Sobolev. Luego la solución se suaviza localmente en el tiempo, entonces para tiempos positivos $0 < t \leq T$ la solución siempre será lisa (i.e. infinitamente diferenciable).

El tratar de resolver la alternativa (A)-(B) nos lleva a contestar las preguntas naturales, tales como: ¿cuáles son las condiciones más generales para valores iniciales $u^0(x)$, que garantizan que en ausencia de la afluencia de la fuerza y energía externas las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes existen para todo tiempo y son lisas? Esta pregunta tiene respuestas parciales. Si los datos iniciales tienen una simetría especial, si la dimensión es dos en lugar de tres, o si los datos iniciales son suficientemente pequeños, o si los valores iniciales son muy oscilatorios, entonces; las soluciones lisas existen globalmente en el tiempo. En el caso de dos dimensiones espaciales $\mathbf{R}^2$. las respuestas afirmativas (A) y (A_p) son bien conocidas (véase [9]), incluso para el caso más difícil de la ecuación de Euler (con $v = 0$). También las afirmaciones (A) y (A_p) son válidas cuando hay alguna simetría, por ejemplo cuando las componentes del vector de velocidad en el sistema de coordenadas cilíndricas $v = (v_r, v_\varphi, v_z)$ no dependen del ángulo φ y la componente $v_j \equiv 0$, lo que reduce el problema al caso bidimensional (véase [9]). En el caso de tres dimensiones $\mathbf{R}^3$ las afirmaciones (A) y (A_p) son válidas si los datos iniciales u^0 son suficientemente pequeños (véase [9]). Y en el caso de los datos iniciales arbitrarios (no pequeños) las afirmaciones (A) y (A_p) son válidas si el intervalo de tiempo $[0, \infty]$ se reemplaza por un intervalo pequeño $[0, T]$, donde $T > 0$ depende de los datos iniciales. Es conocido, que si *a priori* el campo de las velocidades $u(t, x)$ está acotado en $[0, T] \times \mathbf{R}^3$ con algún $T > 0$, entonces las afirmaciones (A) y (A_p) son válidas en $[0, T]$.

Como las ecuaciones de Navier-Stokes representan un modelo físico, entonces sí resultará válida la afirmación (B), esto les proporcionaría mucho trabajo a los físicos; la tarea de corregir el modelo. Desde un punto de vista matemático hay varios caminos para modificar el modelo de Navier-Stokes y obtener existencia global de las soluciones lisas. Por ejemplo, añadir un bi-laplaciano Δ^2 en la ecuación, o regularizar el término no lineal. No obstante hasta no descubrir el misterio de las ecuaciones de Navier-Stokes y no dar demostración matemática a una de las afirmaciones (A) o (B), los físicos prefieren no cambiar nada en el modelo de Navier-Stokes.

Resultados analíticos junto con diferentes experimentos numéricos nos permiten revelar algunas paradojas entre el modelo matemático y procesos reales. La primera paradoja consiste en lo siguiente. Es bien conocido [10] que para cualquier número de Reynolds R (que es el producto de la longitud efectiva por la velocidad promedio entre el coeficiente de viscosidad) la solución única de las ecuaciones de Navier-Stokes en un tubo infinito tal que la velocidad v paralela al eje del tubo se representa en la forma $v_x = a(c^2 - r^2)$, $v_r = v_\theta = 0$, donde c - es el radio del tubo, *a es* cualquier parámetro numérico. Sin embargo los flujos de Poiseuille correspondientes ocurren en experimentos para números de Reynolds R menores que un valor crítico R_0, pasando el cual se convierten en turbulentos. La segunda paradoja fue observada en los flujos estacionarios de Couette entre cilindros rotatorios con un eje común, tales que son invariantes respecto a rotaciones alrededor del eje de los cilindros y translaciones a lo largo del eje. Estos flujos simétricos existen para todos los números de Reynolds, pero en experimentos se observan sólo para pequeños valores del número de Reynolds y en cambio para los valores grandes se cambian a flujos laminares (irrotacionales) pero no simétricos. En esta paradoja se llega a una contradicción con una intuición ingenua de que "causas simétricas deben tener consecuencias simétricas". Sin embargo estas y otras paradojas en líquidos viscosos deberían encontrar explicación satisfactoria en el modelo matemático de Navier-Stokes para líquidos incompresibles con viscosidad. El camino único para verificar lo que realmente da el modelo de Navier-Stokes es llevar acabo un análisis matemático estricto.

Hay muchas formas de proporcionar condiciones suficientes, que pueden garantizar la existencia global de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Por ejemplo, si se controla la norma de las soluciones $||u(t)||_{\mathbf{L}^p}$ con $p > 3$, esto garantizaría la existencia global de las soluciones lisas. Pero hasta el momento es posible controlar nada más la norma $||u(t)||_{\mathbf{L}^2}$. Entonces tenemos un cierto salto finito entre lo que sabemos y lo que queremos saber. En los casos de una simetría especial podemos de manera relativamente simple pasar este salto. Por ejemplo, en el caso de dos dimensiones tenemos una ley de conservación adicional para el remolino $rot\, u \equiv [\nabla \times u]$. Denotamos el rotor del campo de velocidades como $\omega(t, x) = rot\, u(t, x)$, y vamos a llamarlo como remolino o vórtice. Tomando el operador rotor de la ecuación de Navier-Stokes, obtenemos la siguiente ecuación muy bonita (en la suposición que no hay fuerzas externas $f \equiv 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + (u, \nabla)\omega - (\omega, \nabla)u = v\Delta\omega.$$

La forma de esta ecuación es parecida a la ecuación original, desafortunadamente el tercer término $(\omega, \nabla)u$ en la parte izquierda de la ecuación es difícil de manejar en caso general de tres dimensiones. En el caso de dos dimensiones (líquido en un plano), tenemos para la tercera componente de la velocidad $v_3 \equiv 0$, entonces el remolino w siempre es paralelo al eje x_3. Por lo tanto el término difícil $(\omega, \nabla)u$ se anula idénticamente, entonces en $\mathbf{R}^2$ la ecuación para el remolino se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + (u, \nabla)\omega = v\Delta\omega.$$

de donde, aplicando el principio de máximo estándar para ecuaciones parabólicas (véase [8], p. 54), obtenemos una estimación para la norma en el espacio de Lebesgue $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^2)$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^2} |\omega(t, x)| \leq \sup_{x \in \mathbf{R}^2} |\omega(0, x)|.$$

Tomando en cuenta esta estimación y usando teoremas de inmersión de Sobolev podemos controlar todas normas de Lebesgue de las soluciones $||u(t)||_{\mathbf{L}^p}$ con $p \geq 2$, lo que nos lleva a la existencia global en el caso bidimensional. Desafortunadamente este resultado no da ninguna sugerencia para el caso de tres dimensiones $\mathbf{R}^3$, porque el término más difícil $(\omega, \nabla)u$ de la ecuación simplemente se desaparece en el caso de dos dimensiones espaciales $\mathbf{R}^2$.

En el caso general tres dimensional, las líneas del remolino ω son "torcidas" (en particular, no están contenidas en planos). Sin embargo se puede demostrar otra condición suficiente para la existencia global de las soluciones lisas de las ecuaciones de Navier-Stokes: esta es cuando las líneas del remolino ω no se tuercen demasiado, de tal manera que el campo vectorial $\xi(t, x) = \omega(t, x)/|\omega(t, x)|$es Lipschitz continuo con respecto a las coordenadas espaciales en las regiones donde la norma del remolino $|\omega(t, x)|$ es grande. En otras palabras necesitamos acotar el valor $|\nabla\xi(t, x)|$ en casi todos los puntos de las regiones, donde $|\omega(t, x)|$ es mayor que un cierto valor fijo. Lo que sabemos hasta el momento (véase [5]) sobre el gradiente espacial de $\xi(t, x)$, es la estimación

$$\nu\int_0^T \int_{\mathbf{R}^3} |\omega(t,x)| \, |\nabla\xi(t,x)|^2 \, dxdt < \infty,$$

que nos dice que en las regiones donde el remolino $|\omega(t, x)|$ es grande, las líneas del remolino no se tuercen demasiado en promedio cuadrático. Otra vez nos encontramos con un salto entre lo que sabemos hasta el momento y lo que necesitamos saber para tener existencia global de las soluciones lisas. Sin embargo sería posible que no todas las soluciones lisas existan para siempre, entonces este salto no podría ser cubierto. Debido a la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes las soluciones físicamente aceptables pueden destruirse en un tiempo finito. Aún con condiciones iniciales lisas la solución de la ecuación de Navier-Stokes (1)-(2) con el tiempo puede convertirse en una solución turbulenta (perder la unicidad o ramificarse). En este caso desde el punto de vista matemático es necesario llevar acabo una clasificación de las soluciones, seleccionando valores iniciales $u^0(x)$ admisibles, que conducen a soluciones globales. Claro que esta clasificación no es simple y para hacer esto deberíamos entender mejor la parte no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes.

La teoría de ecuaciones de Euler para los líquidos ideales está relacionada mucho con el problema que consideramos. Las ecuaciones de Euler se obtienen de las ecuaciones de Navier-Stokes si dejando los términos no lineales omitimos los efectos de la viscosidad (*i.e.* ponemos $\nu = 0$). La energía cinética se conserva para soluciones lisas de las ecuaciones de Euler. Onsager [14] tiene la conjetura de que las soluciones de las ecuaciones de Euler preservan la energía cinética si como mínimo tienen la regularidad de ser Holder continuas de orden 1/3 al contrario la energía cinética puede decaer con el tiempo. Entonces, la pregunta natural ¿existen las soluciones lisas para ecuaciones de Euler globalmente en el tiempo?, es también abierta para el caso de tres dimensiones espaciales (aunque la ecuación de Euler no está en la lista de premios, ¡qué decepción!). Esta pregunta ha atraído mucha atención de los investigadores. Hay ejemplos de soluciones de las ecuaciones de Euler tales que se destruyen después de un tiempo finito (véase [18], [3]), sin embargo la energía cinética es infinita desde principio, entonces estas soluciones no son físicamente aceptables. En otros ejemplos se muestra que la unicidad de las soluciones generalizadas se viola en el caso de la ecuación de Euler (véase [15], [16]). Como en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes el remolino $\omega(t, x)$ juega un papel principal: es conocido, que si el remolino esta acotado, entonces las soluciones lisas no se destruyen (véase [1]). Parece que para ecuación de Euler las soluciones se destruyen en tiempo finito, *i.e.* probablemente son ciertas las afirmaciones (B) y (B_p). Sin embargo, los intentos de revelar una destrucción de las soluciones de las ecuaciones de Euler ($\nu = 0$) vía un experimento computacional no han sido exitosos debido a las inestabilidades en los cálculos numéricos por lo que es muy difícil hacer conclusiones confiables (véase [13], [19]). A diferencia de las ecuaciones de Euler (cuando $\nu = 0$), se han encontrado muy pocas soluciones explícitas para ecuaciones de Navier-Stokes [13], además casi todas soluciones encontradas no describen los efectos no lineales que ocurren en los líquidos reales.

A más de cien años los científicos no han podido adivinar el misterio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Hay muchas conjeturas e hipótesis sobre el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, nuestros conocimientos están todavía en un nivel bastante primitivo. Por el momento ni siquiera sabemos si las soluciones lisas existen globalmente. Los métodos usuales de la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resultan incapaces para resolver la dicotomía (A)-(B), se necesitan ideas originales. Las maravillosas leyes escondidas nos marcan un camino espinoso hacia el descubrimiento del misterio de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Bibliografía

[1] J.T. Beale, T. Kato, A. Majda, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations,* Commun. Math. Phys., 94, (1984), p. 61-66.

[2] F. Browder, *Mathematical Challenges of the 21 st Century,* Notices of the AMS, 47, No. 3 (2000), p. 324.

[3] S. Childress, G.R. lerley, E.A. Spiegel, W.R. Young, *Blow-up of unsteady two-dimensional Euler and Navier-Stokes solutions having stagnation-pintform, J.* Fluid Mech. 203 (1989), pp. 1-22.

[4] P. Constantin, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics,* en Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, Springer-Verlag, 2001.

[5] P. Constantin, C. Fefférman, *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations,* Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), pp. 775-787.

[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[7] C. Fefférman, *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*, 2000.

[8] F. John, *Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New-York, 1982.

[9] O. Ladyzhenskaya, T/ie *Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows,* Gordon and Breach, 1969.

[10] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover Publ., New York, 1945. 11

[11] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics,* Vol. 6, Butterworth-Heinemann, Oxford, U.K., 1987.

[12] J. Leray, *Sur le Mouvement d'un Liquide Visquex Emplissent 1'Espace*, Acta Math. J. 63 (1934), pp. 193-248.

[13] A.J. Majda, A.L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flows,* Cambridge Univ. Press, 2002.

[14] L. Onsager, *Statistical Hydrodynamics,* Nuovo Cimento, 6, No. 2 (1949), pp. 279-287.

[15] V. Scheffer, *Turbulence and Hausdorff Dimensión,* en Turbulence and the Navier-Stokes Equations, Lecture Notes in Math. No. 565, Springer Verlag, 1976, pp. 94-112.

[16] A. Shnirelman, *On the nonuniqueness of weak solutions of the Euler equation,* Comm. Puré and Appl. Math. 50 (1997), pp. 1260-1286.

[17] S. Smale, *Mathematical problems for the next century.* Math. Intelli-gencer 20, no. 2 (1998), pp. 7-15.

[18] J.T. Stuart, *Nonlinear Euler partial differential equations: singularities in their solution,* In. Proc. Symp. in Honor of C.C.Lin, Worid Scientific Press, Singapore, 1987, pp. 81-95.

[19] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis,* Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

Juan José Rivaud

Shirley Bromberg
Departamento de Matemáticas UAM-Iztapalapa
stbs@xanum.uam.mx

Este año cumple 60 Juan José —Juanjo— Rivaud. Su inagotable interés por las matemáticas nació en su casa, junto con su gusto por la cocina. Con su madre y su abuela comienza a descubrir el mundo de los olores y sabores. Su padre, ingeniero artillero, le abre las puertas de la geometría y del rigor y lo impulsa a seguir una licenciatura en "Ciencias Exactas". Estas pasiones tienen algo en común: cuanto más se comparten, más se disfrutan.

Al terminar la Preparatoria, otro interés compite con las Matemáticas y la Cocina: el deporte, en el cual destaca a nivel nacional. Tan fuerte era este llamado que estuvo a punto de inscribirse en la Escuela de Educación Física, pero su maestro de la Prepa —Manuel Meda— le da el empujón final y se inscribe en la Facultad de Ciencias de la UNAM en 1960 para iniciar sus estudios de Matemáticas en 1961. Se recibe en 1965 con la tesis *Ecuaciones Diferenciales y Puntos Fijos*, dirigida por Carlos Imaz, quien lo invita a proseguir sus estudios en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Cuando concluye la Maestría, va a Northwestern University para hacer el Doctorado, mismo que realiza bajo la supervisión de Robert Welland. Su tesis *Differential Structures on Banach Manifolds*, fue presentada en enero de 1971. A continuación, hace una estancia post-doctoral en Princeton.

A su regreso en 1972, se integra al Departamento de Matemáticas del CINVESTAV y éste ha sido desde entonces su institución permanente. Pero ha visitado diversos Departamentos de Matemáticas: En sus años de Maestría se vincula como profesor de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN, visita la UAM en dos períodos, el primero entre 1979 y 1980 cuando se hace cargo de la Jefatura del Departamento y regresa entre el 2000 y el 2002; es profesor en la Facultad de Ciencias de la UNAM entre 1981 y 1982; visita el Centro de Investigación en Matemáticas entre 1990 y 1991. El conocimiento de primera mano del medio matemático que le han conferido estas estancias, junto con su conocimiento de la propia matemática, han sido esenciales en su participación en múltiples comisiones evaluadoras y diversas comisiones creadas para abordar la problemática de las Matemáticas en el país. Actualmente es Profesor Titular de la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia, del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, sección que coordinó de enero de 1997 a agosto del 2000.

Ya en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV, su interés en el Análisis Diferencial cristaliza con la formación de un grupo de trabajo sobre este tema, al cual he tenido la fortuna de pertenecer. Dentro de este proyecto realicé mi tesis de Doctorado, *Problemas de extensión en clase C^1*, presentada en 1977 y elaboramos un libro, *Análisis Diferencial*, publicado por el Fondo de Cultura Económica. Posteriormente, en 1991, Carlos Ibarra Valdez, defendió su tesis: *Estructura local de los ceros de funciones diferenciables*. La de Jesús Riestra, *Una fórmula generalizada de Taylor para funciones de varias variables y ciertas de sus aplicaciones*, fue presentada en 1992. Luego, cada uno de nosotros, trabajamos diversos problemas en el tema. Fuera de esta línea de investigación, Juanjo se interesó y publicó trabajos sobre convergencia de series, entre los cuales está *The geometry of sum-preserving permutations* (con F. Garibay, P. Greenberg y L. Resendis), el cual apareció en el *Pacific Journal of Mathematics*.

Juan José Rivaud.

En 1973 los libros de texto gratuitos abren la posibilidad de discutir en México los problemas de la educación en Matemáticas, discusión que se daba ya en Europa y Estados Unidos en el marco de la gran reforma de la Matemática Moderna. Los primeros textos de Matemáticas se elaboran en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV Juanjo participa en la realización de los libros para tercer, cuarto y sexto grados y los auxiliares didácticos para tercer y cuarto grados. Su interés por la educación básica no queda allí. En 1991 participa en la escritura de libros de texto para los tres grados de la secundaria, junto con el libro para el maestro. Posteriormente, elabora el plan de estudios para la secundaria en 1993 y los planes de estudio para la Preparatoria del DF en 1999. En otra vertiente, co-coordina un proyecto de la SEP, que la editorial LIMUSA editó, para elaborar textos de Matemáticas y publica en 1984 los textos *Geometría intuitiva 2 (Areas, Volúmenes y Centros de Gravedad)* y *Trigonometría*.

Para Juanjo, las matemáticas no son ni un vicio secreto ni una pasión oculta. Ya desde su época de estudiante, se manifiesta su entusiasmo y su necesidad por compartir con sus compañeros sus descubrimientos, las particularidades, la idea brillante que se oculta tras las demostraciones. Su interés por llegar a público no sólo especializado sino en vías de formación o simplemente público en general, lo ha impulsado a dar conferencias, escribir artículos y libros de divulgación. A modo de ejemplo en esta dirección, citemos *Acerca de Mapas,* el cual apareció en Miscelánea Matemática y *La Matemática, perejil de todas las salsas,* (con Carlos Bosch y Ricardo Berlanga) publicado por el Fondo de Cultura Económica. Su actividad en este campo fue reconocida con el Premio Nacional de Divulgación de la Ciencia 1999, en memoria de Alejandra Jaidar y con su nombramiento como miembro titular del Seminario de Cultura Mexicana.

Como una difusión eficaz está íntimamente vinculada con el vehículo que la lleva, ha participado en múltiples Comités Editoriales, entre los cuales se cuentan el de *Matemáticas y Enseñanza* entre 1974 y 1982, revista que co-funda cuando se hace cargo de la Vicepresidencia de la Sociedad Matemática Mexicana. También ha colaborado activamente en el Comité de *Miscelánea Matemática* a partir de 1995 y de la cual fue Coordinador Editorial entre 1999 y 2001; de *El irracional*, también revista de la Sociedad Matemática Mexicana y del Centro Universitario de Comunicación de la Ciencia, ente 1989 y 1996. Además ha formado parte del Comité Editorial de la Colección la *Ciencia para Tod*os (antes la *Ciencia desde México*), del Fondo de Cultura Económica, entre 1984 y 1999 y del Comité Editorial General de Obras Científicas y Tecnológicas del Fondo de Cultura Económica entre 1990 y 1999.

La fascinación que siente Juanjo cuando descubre el mecanismo oculto en una demostración, como la de un niño cuando descubre un juguete nuevo, no sólo permanece sino que se acrecienta cuando descubre el mecanismo que lo hace funcionar. No es de extrañar que últimamente haya emprendido una nueva aventura: la de la historia y epistemología de las matemáticas, queriendo descubrir cómo se generan, cuándo se generan, cómo se trasmiten los conceptos en matemáticas. Además de los trabajos publicados en esta dirección, dirigió la fase final de la tesis: *Elementos para una crítica matemática de la razón filosófica, la filosofía matemática de David Hilbert*, elaborada por Carlos Torres, presentada en junio de 2001 en la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM y que mereció mención honorífica

Juanjo ha conseguido tener una visión global de la carrera de un matemático, recorriendo todos los caminos y senderos: siempre estudiante, maestro, investigador en sus múltiples facetas —la propia matemática, su historia, su epistemología, su enseñanza—, promotor, director y organizador.

Lectures on continuous-time Markov control processes

Onésimo Hernández-Lerma

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana (Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 3, nivel avanzado, 1994).

Este trabajo presenta una introducción a la teoría de los procesos de control Markovianos a tiempo continuo, usando principalmente técnicas de programación dinámica. Se discuten problemas con horizonte finito e infinito, en un contexto lo suficientemente general como para incluir la mayoría de los procesos de control estocástico que surgen en las aplicaciones, en particular procesos de difusión y procesos de saltos. La teoría desarrollada se ilustra con aplicaciones a modelos lineales con costo cuadrático y a modelos de selección de carteras de inversión y consumo.

Lectures on quantum probability

Alexander M. Chebotarev

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana (Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 14, nivel avanzado, 2000).

This is a self-contained introduction to the theory of the master Markov equation which generalizes to the noncommutative case the backward Kolmogorov or Kolmogorov-Feller equation. In quantum mechanics a master Markov equation is a generalization of the Schrödinger equation with noisy terms in the Heisenberg representation. Special emphasis is given to the construction and study of the main properties of the minimal solution.

The notions of quantum state, observable, completely and conditionally completely positive map are introduced and the relationship between classical and quantum evolutions is explained.

The fundamental problem of well-posedness of a master Markov equation and a quantum stochastic differential equation is discussed, and a nonexplosion criterion is given which generalizes the conditions proved for stochastic processes by Khas'minskii and Taneguchi.

Exercises and open problems in Quantum Probability are suggested to the reader.

Francisco Raggi Cárdenas

María José Arroyo Paniagua
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa.
mja@xanum.uam.mx

Francisco Raggi siempre refleja alegría de vivir, vitalidad y gran fuerza interior.

Uno lo puede encontrar al visitar el tercer piso del Instituto de Matemáticas en la UNAM. Su cubículo se encuentra en la esquina sur poniente, con plantas que ha cuidado desde hace muchos años, dibujos que le hicieran sus hijas, un mapa, una colección de baleros y un escritorio de estilo rústico mexicano. Tiene la cualidad de recibir con una sonrisa y un saludo amable.

Francisco Raggi siempre tiene un problema de matemáticas para trabajar y el tiempo para dedicarle. Tiene en su interior, una planta generadora de energía y las ideas se le ocurren continuamente; el compartir con sus colegas sus resultados e intuiciones en el estudio de las retículas es una de sus fuentes de energía. Siempre me ha sorprendido su capacidad de concentración, si la charla toma un rumbo distinto, él no deja de pensar en el problema y en los instantes posteriores comparte sus conjeturas. Algo que también le distingue es su claridad para pensar en matemáticas. Carácter fuerte, tenacidad y disciplina de trabajo se conjugan con la amistad, la solidaridad y el apoyo que Francisco Raggi brinda generosamente a sus alumnos y a sus colegas.

Su trabajo en investigación mantiene un enfoque general en la Teoría de Anillos y de Módulos que es su especialidad, no se concreta a tipos de anillos particulares y trata de presentar resultados generales que pueden aplicarse a muy distintas clases de anillos, que son el tema de estudio de muchos matemáticos en la actualidad.

Haciendo un análisis cronológico no exhaustivo de su trabajo en investigación, vemos que sus primeros artículos de investigación fueron publicados entre 1967 y 1970 y abordan distintos aspectos sobre localización en anillos no conmutativos. Posteriormente aparecieron publicados los resultados de su trabajo doctoral, en el que estudió el problema de describir la estructura del grupo de unidades de algunos anillos de grupo. Algunos de sus resultados, aparecen citados en el libro de Gregory Karpilowski, titulado *Unit Groups of Group Rings*. Después, centró su atención en estudiar algunas generalizaciones de conceptos clásicos en la teoría de anillos y de módulos para filtros estables de Gabriel. Continuó con el estudio de la retícula de teorías de torsión hereditarias (en colaboración con José Ríos) y encontró condiciones necesarias y suficientes para que las teorías de torsión de Goldman y de Goldie se escindieran centralmente; derivados de estos trabajos se produjeron nuevos teoremas

de estructura para anillos regulares autoinyectivos. También, desarrolló una buena parte del álgebra homológica relativa a teorías de torsión hereditarias. Con enfoque reticular estudió las Clases de Serre y su aplicación en la teoría de la dimensión. A través de su conocimiento de la retícula de teorías de torsión hereditarias, encontró métodos que le permitieron estudiar propiedades de la retícula de teorías de torsión no necesariamente hereditarias. En la actualidad, dedica gran parte de su tiempo a develar las propiedades generales de la Gran Retícula de los pre-radicales asociada a un anillo dado, tema explorado en casos particulares en la literatura y que por su dificultad no había sido abordado en forma general. Uno de sus logros ha sido el encontrar métodos para abordar el estudio de dicha retícula; con sus resultados ha dado nuevas caracterizaciones de clases de anillos muy importantes, como por ejemplo, los V-anillos, los anillos semiartinianos, y los anillos semisimples, entre otros. En el estudio de la retícula de pre-radicales asociada a un anillo dado, Francisco Raggi es pionero y su trabajo, junto con el de sus colaboradores, proporciona una nueva perspectiva en estos temas.

Como docente, es un apasionado de dar clase, labor que realiza desde hace mas de 40 años y que se ha visto interrumpida solamente por el disfrute de un periodo sabático. Los que hemos sido sus alumnos, podemos afirmar que siempre ofrece en forma generosa su tiempo para atender a sus estudiantes sin importar el nivel de avance que éstos tengan. Para él, lo importante es que estén ávidos de aprender y sus alumnos le reconocen su capacidad y entrega. Tiene un gran número de tesis de licenciatura y doctorado dirigidas. A él le ha interesado la publicación de diversos temas de matemáticas en nuestra lengua, muestra de ello la podemos encontrar en los libros en los que ha participado como coautor.

A Francisco Raggi le interesa conocer el mundo en el que vive, es un lector apasionado, conoce de historia, de música y es un cinéfilo persistente. Le gusta practicar los deportes, refleja al participar en ellos un gran espíritu competitivo, también esto lo manifiesta cuando juega bridge y dominó, ya que da su mejor esfuerzo. Le gustan la mecánica y la carpintería, las que ha practicado. Los coches, la buena comida y los buenos vinos son cosas de las que gusta disfrutar.

Algo que le caracteriza es su forma de ser, sincera, directa y sin dobleces, lejos está de un estereotipo escurridizo y temeroso del que dirán, de Francisco Raggi se escuchará realmente lo que piensa y siente.

Es una persona que guarda un gran respeto por sus maestros y lo manifiesta abiertamente, transmite a sus alumnos su admiración por los matemáticos emprendedores en la primera mitad del siglo pasado y que formaron a una gran mayoría de la comunidad matemática actual.

Por último, quisiera terminar esta semblanza de Francisco deseándole que fiel a su vocación de doctor Fausto, permanezca con esa jovialidad y lucidez que ha mantenido invariable desde que le conozco.

Cohomología de Galois de campos locales

Felipe Zaldívar

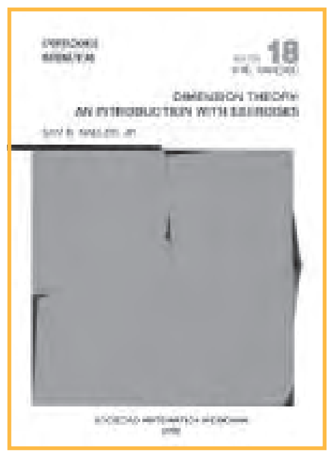
Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana (Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 17, nivel avanzado, 2001).

La teoría de campos de clases local tiene como objetivo dar una descripción de todas las extensiones abelianas de un campo local, de sus grupos de Galois correspondientes y de sus grupos de ramificación. Si K_s es una cerradura separable de K, el grupo de Galois absoluto $G_K = \mathrm{Gal}(K^s/K)$ es isomorfo al límite proyectivo de los grupos finitos $\mathrm{Gal}(L/K)$, donde L/K recorre todas las extensiones finitas de Galois de K, y por lo tanto G_K es un grupo profinito. La teoría de campos de clases local establece una biyección entre los grupos de caracteres continuos $\mathrm{Hom}_{cont}(G_K, Q/Z)$ y $\mathrm{Hom}_{cont}(K^*, Q/Z)$ con buenas propiedades de compatibilidad, en particular, si es una extensión normal de campos locales, entonces se tiene un isomorfismo

$$\mathrm{Gal}^{ab}(L/K)\ QK^*/N_{L/K}L^*,$$

donde $N_{L/K} : L^* \to K^*$ es la norma relativa y $\mathrm{Gal}^{ab}(L/K)$ es la abelianización del grupo $\mathrm{Gal}(L/K)$.

En este libro, estudiamos los grupos de cohomología de los grupos de Galois involucrados, desarrollando toda la herramienta que se necesita, para obtener los resultados más importantes de la teoría de campos de clases local: la ley de reciprocidad local y el teorema de existencia.



Dimension theory: An introduccion with exercises

Sam B. Nadler, Jr.

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana (Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 18, nivel avanzado, 2002).

The book is an introductory text devoted to classical dimension theory in separable metric spaces with applications to fixed point theory, topology of Euclidean spaces, continuum theory and hyperspaces. The book includes background for topics to which the theory is applied. Over 160 exercises illustrate the theory and its applications and indicate related directions for further study.

The book systematically covers the fundamentals of dimension theory with complete proofs. Topics include sum theorems, decomposition theorems, the dimension of Euclidean spaces, embeddings, universal spaces, the equivalence of inductive dimension and covering dimension, characterizations of dimension (in terms of separation, stable values of maps, extensors, and maps to n-cells), dimension of Cartesian products, homotopy theorems involving dimension, maps that change dimension, and Cantor manifolds.

A few specific applications are that cones, suspensions and hyperspaces of arc-like continua have the fixed point property, the Brouwer Invariance of Domain Theorem, the Jordan Separation Theorem and the Jordan Curve Theorem, the fact that continua of dimension ≥ 2 contain indecomposable continua, and dimension theorems for hyperspaces.

Many specific spaces illustrate the theory. At the end of the book is a table of especially important spaces with references to where information about the spaces is located in the book.

Anuncios

III Escuela de Matemáticas de América Latina y el Caribe
IM-UNAM, Morelia, México.

19–28 de agosto del 2003

Informes:

www.matmor.unam.mx/eventos/emalca/default.html

IV Escuela de Verano del Instituto de Matemáticas de la UNAM, Unidad Morelia

11 al 15 de agosto de 2003

Informes:

http://www.matmor.unam.mx/eventos/escuela

Cómputo numérico con aritmética de punto flotante IEEE. Con un teorema, una regla empírica y ciento un ejercicios. Michael L. Overton (traducción de Alejandro Casares M.)

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana (Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 19, nivel medio, 2002).

¿Le es familiar el estándar de la aritmética de punto flotante del IEEE? ¿Desearía entenderlo mejor? Este libro da una amplia visión de la computación numérica, en un contexto histórico, enfocándola especialmente en el estándar IEEE para la aritmética binaria de punto flotante.

Las ideas claves se desarrollan paso por paso, y llevan al usuario desde la representación de punto flotante, la aritmética correctamente redondeada y la filosofía del IEEE respecto a las excepciones, hasta la comprensión de los conceptos cruciales de condicionamiento y estabilidad, explicados en un contexto simple, pero riguroso. Proporciona detalles técnicos que no se encuentran disponibles fácilmente en otra parte, e incluye ejercicios estimulantes que van más allá de los tópicos tratados en el texto.

El libro proporciona una discusión fácilmente accesible, y sin embargo detallada, del estándar de punto flotante del IEEE, posiblemente el más importante en la industria de la computación. Resultado de una cooperación sin precedentes entre científicos de la computación académica y la punta de lanza de la industria informática, se encuentra implantado prácticamente en toda computadora moderna. Otros tópicos incluyen la arquitectura de punto flotante de los microprocesadores Intel y una discusión del soporte al estándar por parte de los lenguajes de programación.

El libro debería ser accesible a estudiantes de cualquier nivel, como también a cualquier lector interesado en computadoras y matemáticas. Su contenido es suficientemente variado como para que todos los lectores, con la posible excepción de los más expertos, encuentren en él algo interesante.

CARTA INFORMATIVA
SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 37,
Julio de 2003

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. 5622-4481 / 82
Fax 5622-4479
smm@smm.org.mx

JUNTA DIRECTIVA

Carlos José E. Signoret Poillon
Presidente

Alejandro Díaz Barriga Casales
Vicepresidente

Lino F. Reséndis Ocampo
Secretario General

Isidro Romero Medina
Secretario de Actas

J. Raúl Montes de Oca Machorro
Tesorero

Fernando Brambila Paz
Vocal

Jesús Muciño Raymundo
Vocal

COMITÉ DE DIFUSIÓN DE LA SMM

Sergio Macías
Jesús Muciño (Coordinador)
Lourdes Palacios
Lino Reséndis
Carlos Signoret

COLABORADORES

Adriana Briseño
Olivia Lazcano
Miguel A. Magaña

DISEÑO Y PRODUCCIÓN

S y G editores, SA de CV
Tels. 5619-5293 / 5617-5610
syg@att.net.mx

PORTADA
Hacienda Sta. Ma. Regla, Hgo.
Fotografía: Roberto Ávila Pozos

SEGUNDA DE FORROS
Huasca de Ocampo, Hgo.
Fotografía: Roberto Ávila Pozos