Ecuaciones de Reacción-Difusión

Eric Ávila Vales
Universidad Autónoma de Yucatán
Facultad de Matemáticas
avila@tunku.uady.mx

1. Introducción

Las ecuaciones de reacción-difusión implican la combinación de dos procesos diferentes.

1) Difusión (Movimiento local)	2) Reacción (Crecimiento, interacciones, cambios de estado)

1.1. Difusión

Difusión es un fenómeno por medio del cual un grupo de partículas se mueven como grupo de acuerdo a la trayectoria irregular de cada una de las partículas. Así los movimientos particulares irregulares dan como resultado un movimiento regular como grupo, a este fenómeno se le conoce como proceso de difusión.

En nuestros cursos básicos de ecuaciones diferenciales parciales estudiamos la ecuación de calor. Para un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave, si $u \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ denota la densidad de las partículas, es decir para $\Omega_1 \subset \Omega$

$$\int_{\Omega_1} u(x,t)dx \approx \text{ número de partículas en } \Omega \text{ (si la integral existe),}$$

entonces, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\Delta u(x,t) = D\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}$, $u(0,t) = u_0(t)$. Las condiciones de frontera pueden ser

$$u|_{\partial\Omega}(x,t) = 0 \quad \text{(Problema de Dirichlet),}$$

$$\text{o} \qquad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}(x,t) = 0 \quad \text{(Problema de Neumann).}$$

En el caso de Neumann, sabemos que $\lim_{t\to\infty} u(t,x) =< u_0 >$ donde $< f >$ representa el promedio espacial de $f(x)$ en Ω.

1.2. Reacción

Las partículas pueden cambiar su estado, debido por ejemplo a interacciones o de manera espontánea. Aquí estamos hablando de reacciones químicas o procesos biológicos, más adelante presentaremos algunos ejemplos.

1.3. Combinación de reacción y difusión

Si sumamos los dos procesos anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= D\Delta u(x,t) + f(x,t,u(x,t)), && (1)\\ u(x,0) &= u_0(x), && (2) \end{aligned}$$

$$u|_{\partial\Omega}(x,t) = 0 \quad \text{(Problema de Dirichlet),}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}(x,t) = 0 \quad \text{(Problema de Neumann).}$$

La ecuación (1) y (2) con alguna de las condiciones de frontera, es una ecuación de reacción-difusión.

Sistemas de reacción-difusión pueden dar lugar a un número de interesantes fenómenos como comportamiento asintótico, múltiples estados estacionarios, estructuras espaciales, pulso o frentes móviles y oscilaciones.

El estudio de estos fenómenos necesita de una variedad de métodos provenientes de muchas áreas de las matemáticas como, por ejemplo, análisis numérico, bifurcación, teoría de la estabilidad, teoría de semigrupos, perturbaciones singulares, espacios fase, métodos topológicos y muchos otros.

1.4. Existencia

Como en cualquier problema de ecuaciones diferenciales estamos interesados en que la solución exista para todos los tiempos (existencia global), que sea única y que varíe continuamente con respecto a los datos, esto se puede demostrar para una clase bastante grande de ecuaciones de reacción-difusión. Hay varias formas de hacerlo, por ejemplo, transformado la ecuación de reacción-difusión en una ecuación diferencial ordinaria en un espacio de dimensión infinita.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= F(u),\\ u(0) &= u_0 \in X. \end{aligned}$$

Donde el estado $u(t) \in X$, X es un espacio de dimensión infinita, por ejemplo $X = C^2(D(F), \mathbb{R}^m)$ y $F : D(F) \subset X \longrightarrow X$, $F(u) = Au + f(u)$ donde A es un operador lineal, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ y $f(\cdot)$ es la parte no lineal. Aquí como en muchas partes del análisis matemático, tratamos primero la parte lineal, consideremos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

cuya solución es $u = e^{AT}u_0$, esto nos conduce a la teoría de semigrupos, ver [14], [18] o [26].

Ahora consideremos la ecuación completa $\dot{u} = Au + f(u)$, $u(0) = u_0$, la cual vemos como una perturbación de la ecuación lineal. A través de la teoría de perturbaciones podemos probar que las ecuaciones de reacción-difusión están bien planteadas. Otro método para probar la existencia es a través de subsoluciones y supersoluciones, de manera constructiva se prueba la existencia y unicidad, además ello sirve para aproximar numéricamente la solución, ver [25]. Otra vía es a través de teoremas de punto fijo.

2. Algunos modelos físicos de las ecuaciones reacción-difusión

2.1. Genética Poblacional [12]

Consideremos una población de individuos en donde cada uno porta dos genes, digamos a y A, así, la población se divide en tres genotipos aa, aA y AA. Sea Ω el hábitat donde vive la población y sean $u_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, las densidades de población de aa, aA y AA respectivamente. Supongamos que la población se cruza de manera aleatoria con una tasa de nacimiento r y que la población se mueve con una constante de difusión D. También suponemos que las tasas de muerte dependen de los genotipos y los denotamos respectivamente con t_i, $i = 1,2,3$. Bajo estas condiciones las densidades u_i satisfacen el sistema

$$(u_i)_t - \nabla(D_i \nabla u_i) = f_i(x,t,u_1,u_2,u_3), \qquad i = 1,2,3.$$

2.2. Dispersión de mamíferos [4]

Modelos espaciales para la dispersión de mamíferos en ecología vienen desde Skellam, quien modeló la expansión de la población de muskrats (roedores acuáticos) en Europa. Skellam encontró una relación lineal entre la raíz cuadrada del área habitada por los muskrats y el tiempo, usando un modelo de dos dimensiones con dispersión aleatoria y crecimiento exponencial de la población en coordenadas polares. Suponiendo que la dispersión se da por igual en todas direcciones (i.e. es isotropica), y que el crecimiento de la población es proporcional a la densidad poblacionales, el modelo es:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \alpha S,$$

donde D es la constante de difusión y α es la tasa neta de crecimiento.

2.3. Modelo lineal de Fischer del avance de los genes ventajosos [12]

Considere la población de una especie dada, distribuida uniformemente a lo largo de un hábitat lineal. Supongamos que el tamaño del hábitat es grande en comparación con las distancias que separan los lugares de la descendencia de aquellos que son de sus padres. Supongamos además que en algún punto del hábitat una mutación ventajosa ocurre (es decir, una mutación que es de alguna manera ventajosa para la supervivencia de algún miembro de la población). Esta mutación se difunde, primero en la vecindad de la ocurrencia de la mutación y después en los alrededores de la población.

Sea $p = p(x,t)$ la concentración de los miembros de la población con el gen mutante y sea $q = q(x,t)$ la concentración de los miembros de la población cuyos descendientes tienen el gen mutante (x es la posición dentro el hábitat). Podemos asumir que $q = 1 - p$. Denotemos por α la intensidad de la selección en favor del gen mutante, el cual tomamos como independiente de p. Para α suficientemente pequeña, la concentración p varía continuamente con el tiempo de generación en generación. Suponga que la razón por generación a la cual los miembros de la población con el gen mutante se difunde dentro de la población total está dada por $-k\frac{\partial p}{\partial x}$, donde $k > 0$ es una constante de difusión (independiente de x y p). Bajo todas estas suposiciones se puede mostrar que la concentración del gen mutante satisface:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha p(1-p) + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

2.4. Modelo continuo de morfogénesis de Turing [31]

La morfogénesis es el desarrollo embriológico de la estructura de un organismo o de alguna parte del mismo. Turing sugiere un modelo en el cual un embrión idealizado contiene dos sustancias químicas características x y y llamados morfogenos. Estas sustancias reaccionan entre sí en cada célula y se difunden entre células vecinas con coeficientes de difusión μ y ν respectivamente. Considere un embrión idealizado con la forma de un anillo de tejido de radio ρ. Sean X y Y las concentraciones de los correspondientes químicos. Sean $f(X,Y)$ y $g(X,Y)$ las razones a las cuales las concentraciones X y Y cambian debido a la interacción química. Cada morfogeno se mueve de una región de mayor concentración a una de menor concentración con una razón proporcional al gradiente de la concentración. Entonces las ecuaciones son

$$\begin{aligned} X_t &= f(X,Y) + \frac{\mu}{\rho^2}X_{\theta\theta}, \\ Y_t &= g(X,Y) + \frac{\nu}{\rho^2}Y_{\theta\theta}, \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo entre los radios. Turing usó las siguientes fórmulas para las funciones

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= -aX^2 - bXY + d, \\ g(X,Y) &= aX^2 + bXY - cY + e, \end{aligned}$$

donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$ son parámetros de la reacción.

2.5. Modelo de FitzHugh de la propagación de un impulso voltaico en un nervio de axón de una célula nerviosa

Hodgkin y Huxley [21] propusieron un modelo para describir los eventos iónicos y eléctricos que ocurren durante la transmisión de un impulso a través de la membrana superficial y la propagación del impulso voltaico a través del nervio de un axón. Sin embargo este modelo consiste de cuatro ecuaciones diferenciales que son todavía difíciles para un riguroso análisis matemático. R. FitzHugh sugiere un modelo para la propagación del impulso voltaico a través del nervio de un axón que es más simple que el anterior. R. FitzHugh considera la célula nerviosa como un oscilador eléctrico no lineal

$$\ddot{v} + (v^2 - 1)\dot{v} + cv = 0,$$

donde v es una variable adimensional correspondiente al potencial de la membrana V y $c > 0$ una constante. Haciendo

$$w = -\dot{v} + v - \frac{v^3}{3},$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v - \frac{v^3}{3} - w, \\ \dot{w} &= cv. \end{aligned}$$

La variable w es llamada la *variable de recuperación.* Posteriormente R. FitzHugh modifica este sistema quedando de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v - \frac{v^3}{3} - w + i, \\ \dot{w} &= c(v + a - bw), \end{aligned}$$

donde a y b son constantes positivas e i una variable adimensional correspondiente al total de la densidad de la corriente de la membrana. Combinando esta ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} v_t &= v - \frac{v^3}{3} - w + kv_{xx}, \\ w_t &= c(v + a - bw). \end{aligned}$$

donde k es proporcional a $\frac{\rho}{2R}$ (ρ es el radio del nervio del axón y R la resistencia específica del axón). Si $w = 0$ obtenemos el modelo unidimensional de FitzHugh:

$$v_t = v - \frac{v^3}{3} + kv_{xx}.$$

2.6. Modelo de Brusselator para la reacción Belousov-Zhabotinsky (RBZ)

La reacción RBZ es una reacción química en la cual la concentración de los reactivos exhibe comportamiento oscilante. El modelo Brusselator de la RBZ describe el caso de un solo modo de oscilación para el cual el sistema regresa si es perturbado. La reacciones químicas siguen el esquema:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{x}, \\ \mathbf{B} + \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{y} + \mathbf{D}, \\ 2\mathbf{x} + \mathbf{y} &\rightarrow 3\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} &\rightarrow \varepsilon, \end{aligned}$$

donde **A**, **B**, **D**, ε, **x** y **y**, son componentes químicos. Sean x e y las concentraciones de los componentes **x** y **y** y A y B las concentraciones de los componentes **A** y **B**. Asumiendo que las concentraciones A y B se mantienen constantes durante la reacción química y que el sistema tiene únicamente una dimensión espacial se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= A - (B+1)x + x^2 y + D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= Bx - x^2 y + D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \end{aligned}$$

donde D_1 y D_2 son constantes de difusión y ξ es la coordenada espacial.

Mencionamos en la sección 1 algunos fenómenos que pueden dar lugar a las ecuaciones reacción-difusión, en las siguientes secciones hablaremos del comportamiento asintótico y de las ondas viajeras.

3. Comportamiento asintótico

Consideremos dos casos: el caso escalar y el de sistemas.

3.1. El caso escalar

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} u_t &= d\Delta u + ru \text{ en } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 \text{ en } \partial\Omega \times (0, \infty). \end{aligned} \tag{3}$$

Las soluciones de (3) las encontramos por separación de variables en términos de las soluciones del problema de valores propios asociado

$$\begin{aligned} d\Delta\Psi + r\Psi &= \delta\Psi \text{ en } \Omega, \\ \Psi &= 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Podemos probar que (4) admite soluciones no nulas Ψ sólo para ciertos valores del parámetro δ, [23]. Una solución de (4) consiste de un número δ, el cual se le denomina un valor propio y una función no nula $\Psi(x)$ llamada función propia. Si la frontera $\partial\Omega$ es suave, entonces (4) tiene una sucesión infinita de valores propios $\delta_1 > \delta_2 \geq \delta_3 \geq \cdots \geq \delta_k \geq \cdots$ con $\delta_k \rightarrow -\infty$ cuando $_k \rightarrow \infty$. Las soluciones de (3) las podemos escribir como

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^{\delta_k t} \Psi_k(x).$$

Donde los coeficientes u_k dependen del dato inicial $u(x, 0)$. El valor propio principal de (4) es el valor propio más grande, δ_1. Podemos probar que la función propia asociada Ψ_1, es siempre positiva en Ω, propiedad que caracteriza a los valores propios principales. Así u crece exponencialmente si $\delta_1 > 0$ pero decrece exponencialmente si $\delta_1 < 0$.

Consideremos el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot d(x)\nabla u + \overrightarrow{b}(x) \cdot \nabla u + g(x,u)u \qquad \text{en } \Omega \times (0, \infty), \tag{5}$$

$$d(x)\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} + \beta(x)u = 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty). \tag{6}$$

Con $g(x, u)$ de clase C^2 en u y C^α en x, y existe una $k > 0$ tal que $g(x, u) < 0$ para $u > k$. Si el valor propio principal δ_1 es positivo en el problema

$$\begin{aligned} \nabla \cdot d(x)\nabla\Psi + \overrightarrow{b} \cdot \nabla\Psi + g(x,0)\Psi = \delta\Psi \quad &\text{en} \quad \Omega, \\ d(x)\frac{\partial \psi}{\partial \overrightarrow{n}} + \beta(x)\psi = 0 \quad &\text{en} \quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

entonces (5) y (6) tienen un equilibrio positivo mínimo u^* tal que todas las soluciones de (5) y (6) positivas en algún subconjunto abierto de Ω, son acotadas por abajo a partir de un cierto rango por orbitas que tienen a u^* cuando $t \rightarrow \infty$.

3.2. El caso de sistemas

Consideramos el sistema

$$u_t = D\Delta u + F(u) \quad \text{en} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{8}$$

$u(x,0) = \phi(x)$ para $x \in \Omega$ donde $u = (u_1, \ldots, u_n)$ $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función suave y $D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$, d_i es una constante positiva para cada i, Ω es $\mathbb{R}^n$ o algún abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Para estudiar el comportamiento asintótico del sistema recurrímos al concepto de los rectángulos invariantes.

Definición.- *Un rectángulo n-dimensional $\sum = \{u|a \leq u \leq b\}$ (donde $a \leq u \leq b$ significa $a_i \leq u_i \leq b_i$ para $i = 1, \ldots, n$) con $-\infty \leq a_j < b_j \leq \infty$ se dice que es invariante para el sistema (4) si siempre que $u(x,0) \in \Sigma, \forall x \in \Omega$ se tiene $u(x,t) \in \Sigma$ para toda $t > 0$ y $x \in \Omega$.*

Definición.- *$\sum = \{u|a \leq u \leq b\}$ se dice que es contractado por el campo vectorial $F(u)$ si para cada i, $f_i(u) < 0$ cuando $u_i = a_i$ y $F_i(u) < 0$ cuando $u_i = b_i$*

Teorema [5]: *Sea $\Omega = \mathbb{R}^m$ o un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^m$ con frontera suave. Sea F suave tal que existe u^* con $F(u^*) = 0$. Supongamos que existe una familia uniparamétrica de rectángulos $\sum(t) = \{u|a(t) \leq u \leq \mathrm{A}(t)\}$, $t \in [0,1]$ con $\sum(1) = \{u^*\}$, $\sum(t)$ es contractado para $t \in [0,1]$ y $a(t)$, $A(t)$ son continuas con $a(t)$ creciente y $A(t)$ decreciente, entonces si u es solución de (7) y (8) tal que $u(x,T) \in \Sigma(0)$ para toda $x \in \Omega$ y cierto T positivo, $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u^*$ uniformemente para $x \in \Omega$.*

Para tratar los asuntos relacionados con la dinámica a largo plazo necesitamos importar ideas de la teoría de sistemas dinámicos, ver [8] y [32]. El concepto clave aquí es el atractor. Buscamos un subconjunto del espacio fase que atraiga y atrape todas las soluciones, de esta manera para estudiar el comportamiento asintótico es suficiente con estudiar el comportamiento que tienen las soluciones en el interior del atractor. La pregunta que surge es si el atractor es de dimensión finita o infinita. Otra alternativa para tratar el comportamiento asintótico es a través del estudio de supersoluciones y subsoluciones [25].

4. Ondas viajeras

Existen soluciones especiales de las ecuaciones de reacción-difusión autónomas que juegan un papel importante en las aplicaciones. Para el caso escalar las llamaremos soluciones viajeras, mientras que para el caso de los sistemas las denominaremos como formación de patrones. Consideremos como ejemplo el caso escalar para la ecuación de Fisher.

$$\partial_t v(z,t) - \partial_{zz} v(z,t) = v(l - v).$$

Para hallar la onda viajera, supongamos que $v(z,t) = V(z - ct)$ donde la función $V(s)$ tiende a valores constantes cuando s tiende a $\pm\infty$ entonces la ecuación anterior es $-cV'(s) - V''(s) = V(s)(1 - V(s))$, $\infty < s = z - ct < \infty$ la cual se reduce al siguiente sistema

$$\begin{aligned} V'(s) &= W(s), \\ W'(s) &= -cW(s) - V(s)(1 - V(s)). \end{aligned}$$

Los puntos críticos del sistema son $(0,0)$ y $(1,0)$, el primero es un nodo estable si $c > 2$ y un foco estable si $0 < c < 2$, $(1,0)$ es un punto silla para todos los valores de c. A través de un análisis del plano fase podemos probar que la ecuación de Fisher tiene una solución onda viajera para $c > 2$. En cuanto a la estabilidad de la onda viajera, depende del comportamiento de la condición inicial para valores grandes de $|x|$.

Dadas la características que las soluciones ondas viajeras tienen, hacen que en las cuestiones de modelación sean útiles en las áreas de: Invasiones biológicas [7], invasiones humanas [13], incendios forestales [24], epidemias [27], crecimiento de tumores [6], cristalización polimérica [20].

Las soluciones anteriores que se propagan en forma de un pulso o frente viajero sin un cambio en su forma y velocidad son muy importantes. Como hemos visto en los casos anteriores las ecuaciones parciales se reducen a un sistema de ecuaciones ordinarias usando un sistema de coordenadas móvil. La forma de el pulso o frente viene dado por la solución del sistema de ecuaciones ordinarias que en casos simples, como los presentados anteriormente podemos resolver analíticamente, en la mayoría de los casos la solución la obtenemos numéricamente. Las ondas viajeras en ecuaciones de reacción-difusión se discuten en detalle en [11, 16, 28].

Para el caso de sistemas, consideremos por ejemplo

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma(z,t) &= -\sigma n, \\ \partial_t n(z,t) &= \sigma n - bn + \partial_{zz} n. \end{aligned}$$

Para encontrar las ondas viajeras solución, supongamos que $\sigma(z,t) = f(z - ct)$, $n(z,t) = g(z - ct)$, tal que $\sigma \to 1$ y $n \to 0$ cuando $z \to \infty$, $\sigma' \to 0$ y $n \to 0$ cuando $z \to -\infty$.

Entonces

$$\begin{aligned} -cf'(z) &= -f(z)g(z), \\ -cg'(z) &= f(z)g(z) - bg(z) + g''(z), \end{aligned}$$

las cuales nos llevan a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{c} f(z)g(z), \\ g'(z) &= -cf(z) + bc \log f(z) + c - cg(z). \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $(1,0)$ y $(f_0, 0)$ para algún f_0 con $0 < f_0 < 1$. $(f_0, 0)$ resulta ser un punto silla para todos los valores de c mientras que $(1,0)$ es un foco estable para $c^2 < 4(1-b)$ y un nodo estable para $c^2 > 4(1-b)$, así las ondas viajeras existen para $c^2 > 4(1-b)$.

5. Comentario final

Por lo que respecta al estudio del comportamiento asintótico del sistema (1), se ha avanzado enormemente en el caso donde el termino de reacción no aparece el tiempo, es decir, cuando el sistema es autónomo [1, 3, 9, 10, 15]. Los esfuerzos se han dirigido a generalizar los resultados cuando la ecuación es no autónoma. Dentro del caso no autónomo, se ha trabajado intensamente el caso donde la variación es periódica con o sin variación espacial [2, 17, 19, 29, 30]. Otro caso no autónomo es cuando la variación temporal tiene un retardo con o sin variación espacial [22 y sus referencias].

Referencias

[1] Alikakos N. D., an application of the invariance principle to reaction-diffusion equations, *Differential Equations* 33 (1979), pp. 201-225.

[2] Avila-Vales, E. J. y Montañez May, T. Asymptotic behavior in a general diffusive three-species predator prey model. *Comun, Pure appl.* Anal. 1 (2002) No. 2, 253-267.

[3] Bange D.W., Periodic solution of a quasilinear parabolic differential equation, *J. Differential equation* 17 (1975), 61-72.

[4] Britton, N.F. (2003).*Essential Mathematical Biology,* Springer.

[5] Brown P. N., Decay to uniform status in competitive systems, SIAM J. *Math. Anal.,* 14 (1983), pp.659-673.

[6] Burgués P.K. et al., *J. Neuropathol. Exp. Neurol.* 56. 704 (1995).

[7] Campos D., Fort J., and Llebot J.E., *Phys. Rev. E* 66, 062901 (2002).

[8] Cantrell, R.S. y Cosner, C. (2003). *Spatial ecology via reaction-diffusion equations,* Wiley.

[9] Conway E. and Smoller J., A comparison therem for systems of reaction-diffusion equations, comm. *Partial Differential Equations,* 2 (1977), pp. 679-697.

[10] Conway, E. D., Hoff D. And Smoller J.A., Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations, SIAM *J. Appl. Math,* 35 (1978), pp.1-16.

[11] Fife P. in *Lecture Notes in Biomathematics,* Vol. 28 (Springer, New Cork, 1979).

[12] Fisher R 1937 *Ann. Eugenics* 355.

[13] Fort J. and Méndez V., *Phys, Rev. Lett* 82, 867 (1999).

[14] Friedman, A. (1976) *partial diferencial equations,* Krieger.

[15] Gardner R.A., Existence and stability of travelling wave solutions of competition models: a degree theoretical approach, *J. Differential Equations* 44 (1982) 343-364.

[16] Grindrod, P. (1996). The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations-Patterns and Waves. Clarendon Press, Oxford, segunda edición.

[17] Hernández Moguel, L.F., Ávila-Vales, E.J., Estrella González, A.G. y Escalante Torres, M., Numerical Approximation for the reaction difusión system modelling the interaction of two predators and one prey. *Dyn. Cont. Discrete. Syst. Ser B. App. Algorithms,* 2003, suppl. 112-116.

[18] Henry, D. (1981) geometric theory of semilinear parabolic equqtions. *Lecture notes in math.* 840 Springer-Verlag.

[19] Hess P., Periodic-parabolic Boundary Value Problem and Positivity, *Pitman Res. Notes Math Ser.* 247, Longman Scientific and Technical, New Cork, 1991.

[20] Higgs. P. y Ungar, G. The dilution wave in polymer crystalization is described by Fisher reaction-diffusion equation, *J. of Chemical physics* 114 (15) 6558-6559.

[21] Hodgkin, A. L. y Huxley, A. F., A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiology,* 117 (1952), 500-544.

[22] Lu X. and Feng W., Periodic solution in a competition model with difusión and distributed delay effect, *Nonlinear Anal.,* 27 (1996), 699-709.

[23] Manes, A. y Micheletti, A. M., Un estensione della teoria variazionale classica degli autovaiori per operatori ellitici del secondo ordire. *Boll. Un. Mat. Ital.* 7 (1973), 285-301.

[24] Méndez V. and Llebot J.E., *Phys. Rev. E.* 56, 6557 (1997).

[25] Pao, C.V. (1992) nonlinear parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press.

[26] Pazy, A. (1983). Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. *Applied mathematical sciences* 44, Springer-Verlag.

[27] Shigesada N y Kawasaki, K. 1997 Biological Invasions: Theory and Practice, Oxford Press.

[28] Smoller, J. (1994) Shock waves and reaction-diffusion equations, segunda edición, Springer-Verlag.

[29] Tineo A., Asymptotic behavior of solutions of a periodic reaction-diffusion system of a competidor-competitor-mutualist model, *J. Differential equations,* 108 (1994), 326-341.

[30] Tineo A., Existente of global coexistence for periodic competition difusión systems, *Nonlinear anal.,* 19 (1992), 335-344.

[31] Turing, A. M., The chemical basis or morphogenesis, *Phil. Trans. Roy. Soc. B,* 237 (1952), 5-72.

[32] Zhao, X. Q. (2003). Dynamical Systems in Population biology, Springer.

Estadística descriptiva para bachillerato
Ma. del Pilar Alonso Reyes
José Antonio Flores Díaz

Publicado por el Instituto de Matemáticas, UNAM
(Temas de Matemáticas para Bachillerato No. 5, 2004).

Es difícil predecir la utilidad de un texto, sobre todo en un país con tantas cosas por hacer.

Sin embargo, consideramos en base a nuestra experiencia en la docencia, que el presente podrá llenar, en la medida de lo posible, el inmenso vacío que existe en la literatura especializada de la materia. No nos queda la menor duda de que hace falta mucho entusiasmo y paciencia para que día con día sea mayor el número de personas que se acerquen al uso y entendimiento de la Estadística. Esperamos que este libro sirva para acortar estas distancias.

La propuesta que en principio nos llevó a elaborar este trabajo, perseguía el objetivo de crear un texto para el bachillerato, pero una vez terminado, tenemos la certeza de que el presente no únicamente será útil para dicho nivel: actualmente son muchos los programas de licenciatura que igualmente requieren del uso de dicha materia. Es por esta razón por la cual esperamos que tan pronto como surja a la luz pública, se empiece a difundir su existencia.

Noticias sobre la Olimpiada Internacional de Matemáticas 2005

Ana Irene Ramírez Galarza
Facultad de Ciencias-UNAM
rgalarza@servidor.unam.mx

Como se sabe, este año la Olimpiada Internacional de Matemáticas se realizará en nuestro país, en la ciudad de Mérida, Yucatán, del 8 al 19 de julio.

El número de países que han aceptado asistir, 94 países, es el mayor de toda la historia de la Olimpiada Internacional. Seguramente, esto se debe a las características de nuestro país, pero es también un reconocimiento a la labor desplegada por los distintos Comités que la Sociedad Matemática Mexicana ha designado como responsables de la organización de las Olimpiadas Nacionales, pues desde que en 1986 la Sociedad Matemática Mexicana se hizo cargo del entrenamiento del equipo que representa a México, el desempeño de los alumnos cambió radicalmente y ya hace varios años que México queda siempre por arriba de la media.

Los preparativos para la 46ª Olimpiada Internacional van por buen camino. Numerosos miembros de la comunidad matemática han aceptado colaborar en comités para cubrir las distintas labores, desde la parte logística hasta la de selección y calificación de problemas. Los responsables de los comités son: Radmila Bulajich Manfrino, Presidenta del Comité general y del Comité financiero; Omar Antolín Camarena, Comité de coordinación de problemas; Anne Alberro Semerena, Comité de desarrollo; Ignacio Barradas Bribiesca, Comité de estudiantes; Julio César Díaz Mendoza, Comité de suministros; José Antonio Gómez Ortega, Comité ejecutivo; Gabriela Campero Arena, Comité editorial; Alejandro Illanes Mejía, Comité académico; Florian Luca, Comité de selección de problemas; Rita Vázquez Padilla, Comité de aplicación de examen; Javier Páez Cárdenas, Comité de transporte; Ana Irene Ramírez Galarza, Comité de alojamiento; Kelly Scoggings Martínez, Comité de relaciones internacionales; Carmen Sosa Garza, Comité de ceremonias; Francisco Zaragoza Martínez, Comité de cómputo.

El programa general de actividades será:

- Algunos miembros del Comité Organizador llegarán a Yucatán desde inicios de julio para preparar la llegada de los líderes de las delegaciones y del resto de quienes conformarán el Jurado que, en Telchac, elegirán los problemas para los exámenes.
- Los colíderes y los concursantes llegarán a Mérida a partir del 11 de julio y el 12 se hará la inauguración oficial.
- Los exámenes se realizarán los días 13 y 14 de julio. Cada país esta representado por seis alumnos máximo.
- Los días 15 y 16 de julio se calificarán los exámenes y dichas calificaciones se discutirán entre los profesores que acompañan a sus alumnos (líder y colíder) y los coordinadores de los problemas (jurado calificador). Mientras tanto, los concursantes realizarán actividades que fomenten la integración de las delegaciones. La noche del 16 de julio se llevará a cabo la última reunión del Jurado, donde se decide qué alumnos obtendrán medalla de bronce, plata u oro. Además, el país sede para la próxima Olimpiada hará la presentación e invitación oficial. Por último, se revisan todos los aspectos de la Olimpiada.
- El 17 de julio, todos los participantes de la Olimpiada visitarán Chichen Itzá.
- El 18 de julio se llevará a cabo la Ceremonia de Clausura y Premiación, para posteriormente asistir al banquete de despedida.
- El 19 de julio, todas las delegaciones regresarán a sus lugares de origen.

Desde hace algunos meses se están recibiendo problemas de distintas partes del mundo y el Comité de selección de problemas, ya inició su labor. A principios de junio se integrarán a este comité algunos expertos internacionales que ayudarán a escoger los problemas y a elaborar la Lista Corta. Esta Lista Corta se compone de 25 problemas aproximadamente, que deben ser inéditos. Durante los primeros días de la Olimpiada Internacional, ya que se haya integrado el jurado en Telchac, se escogerán los seis problemas que tendrán que resolver cada uno de los alumnos que participa en esta Olimpiada.

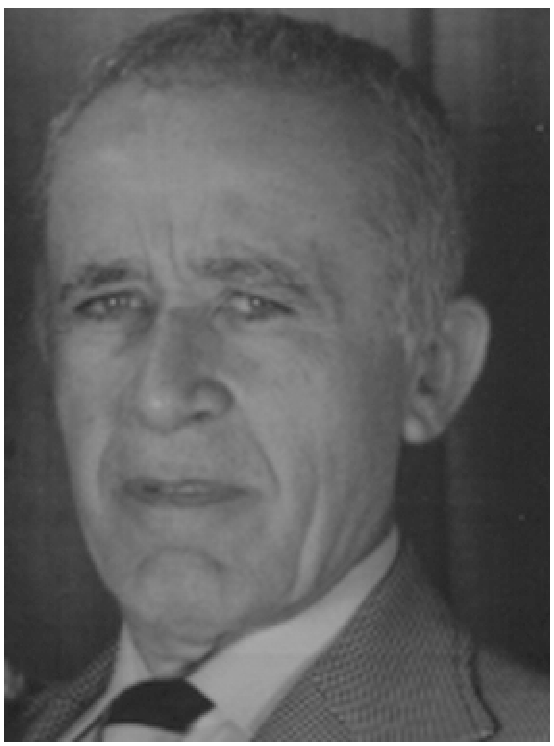
Con la cooperación de la comunidad matemática, estamos seguros de que esta Olimpiada Internacional de Matemáticas será un éxito.

Países invitados:

Albania
Alemania
Arabia Saudita
Argentina
Armenia
Australia
Austria
Azerbaiján
Bangla Desh
Bielorrusia
Bélgica
Bolivia
Bosnia Herzegovina
Brasil
Bulgaria
Canadá
Chile
República Popular China
Colombia
República de Corea
Costa Rica
Croacia
Cuba
Chipre
República Checa
Dinamarca
República Dominicana
Ecuador
El Salvador
Eslovenia

Eslovaquia	Israel	Mozambique	Serbia y Montenegro
España	Italia	Holanda	Singapur
Estados Unidos	Japón	Nueva Zelanda	Sudáfrica
Estonia	Kajastán	Nicaragua	Sri Lanka
Finlandia	Kuwait	Noruega	Suecia
Filipinas	Kyrgystán	Panamá	Suiza
Francia	Latvia	Pakistán	Taiwán
Grecia	Liechtenstein	Paraguay	Tayikistán
Guatemala	Lituania	Perú	Trinidad y Tobago
Honduras	Luxemburgo	Polonia	Túnez
Hong Kong	Macao	Portugal	Turquía
Hungría	República de Macedonia	Puerto Rico	Turkmenistán
Islandia	Malasia	Reino Unido	Ucrania
India	República de Moldava	Rumania	Uruguay
Indonesia	Mongolia	República Islámica de Irán	Venezuela
Irlanda	Marruecos	Federación Rusa	Vietnam

Para mayor información consulte la página: `http://www.imo2005.org`



"En memoria de nuestro querido colega
y socio fundador Maestro **Francisco Zubieta Russi**†"

CONVOCATORIA SMM

Se invita a la comunidad de la Sociedad Matemática Mexicana a consultar en su página web (www.smm.org.mx) la convocatoria oficial para la elección de la Junta Directiva de la SMM y miembros no permanentes del Comité Consultivo

Eventos

- IV Escuela de Análisis y Física Matemática.
  Del 30 de mayo al 3 de junio del 2005.
  Instituto de Matemáticas UNAM, Unidad Cuernavaca
  http://everano.matcuer.unam.mx

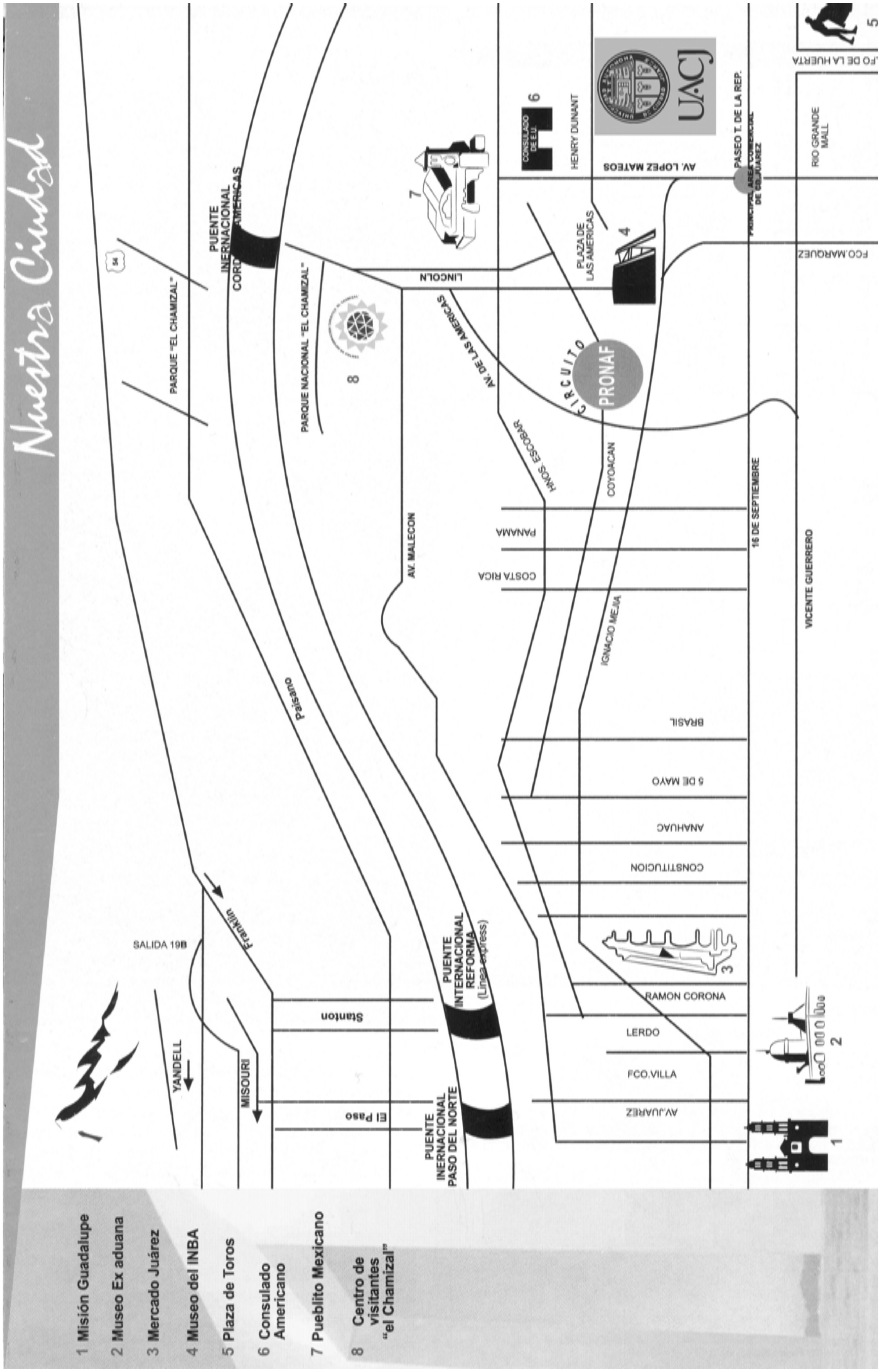
- XVI Coloquio Latinoamericano de Álgebra.
  Del 1 al 9 de agosto del 2005.
  Colonia (Uruguay)
  wrferrer@cmat.edu.uy
  http://www.cmat.edu.uy/cmat/eventos/16cla

- XV Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría.
  Del 7 al 11 de Noviembre del 2005.
  Universidad Autónoma de Baja California, Tijuana Baja California.
  colmemexv@uabc.mx
  http://www.uabc.mx/colmemexv

¿Ya pagaste tu membresía 2005?

Recuerda que siempre estas a tiempo de renovarla.
Mayores informes al 5622 4481 y 82, 5849 6709 y 10
Imprime tu formato de membresía en:
http://www.smm.org.mx/SMMP/html/modules.php?name=Membresias

La lista de hoteles para el XXXVIII Congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana que se llevará a cabo del 23 al 28 de octubre del presente en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, la podrá consultar a partir del próximo 1ro. de Mayo en nuestra página web:
http://www.smm.org.mx/cdjuarez



Ubicación de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Henry Dunant 4016, Zona Pronaf Cd. Juárez, Chihuahua, México C.P. 32310

Teoría de Juegos en Topología

V. V. Tkachuk
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
vova@xanum.uam.mx

En la vida real cualquier juego se termina en un número finito de pasos (o jugadas). Esto puede dar la impresión de que la Teoría de Juegos es sólo aplicable donde se consideran conjuntos finitos. Sin embargo fue en los años cuarenta del siglo pasado cuando los topólogos descubrieron que se puede definir generalizaciones muy naturales de juegos finitos y aplicar las técnicas desarrolladas en la Teoría de Juegos en el estudio de espacios topológicos que casi siempre son infinitos.

Muchos ejemplos de ello se presentan en el libro [Tk]; en este artículo vamos a considerar solamente un caso particular del juego introducido independientemente por Galvin y Telgársky (vease [Ga] y [Te]). Supongamos que tenemos fijado un conjunto A de los números reales y hay dos jugadores llamados P (el de los Puntos) e I (el de los Intervalos). Los jugadores P e I realizan sus jugadas alternadamente: en la jugada J_n número n el jugador P elige un punto $x_n \in \mathbb{R}$ y el jugador I responde con elegir un intervalo $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $a_n < x_n < b_n$. El juego se termina después de que se hagan las jugadas J_n para todo $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. La sucesión $\{\langle x_n; (a_n, b_n)\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ se llama *el partido* y la familia $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ se declara *el resultado del partido.* Este resultado determina al ganador de la siguiente manera: el jugador P gana si $A \subset \bigcup\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$; en caso contrario el ganador es el jugador I.

En otras palabras, el jugador P pretende "obligar" al jugador I a cubrir todos los puntos del conjunto A mientras I trata de evitarlo. La herramienta principal para el estudio de cualquier juego es el concepto de *estrategia ganadora.* En nuestro caso la estrategia ganadora del jugador P es un método de elección de puntos tal que P gana en cualquier partido en el cual aplica este método. Formalmente dicho, una estrategia α del jugador P es una función que asigna a cada sucesión finita $S = (I_1, \ldots, I_n)$ de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ (es posible que $n = 0$, es decir $S = \emptyset$) un punto $x_{n+1} = \alpha(I_1, \ldots, I_n) \in \mathbb{R}$.

Se dice que el jugador P *aplica una estrategia* α en un partido $\{\langle x_n; I_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ si $x_1 = \alpha(\emptyset)$ y $x_{n+1} = \alpha(I_1, \ldots, I_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La estrategia α del jugador P es *ganadora* si P gana en cualquier partido donde aplica la estrategia α.

El planteamiento natural es ¿para cuáles conjuntos A el jugador P tiene una estrategia ganadora? Si respondemos a esta pregunta, entonces tenemos un método (que pertenece precisamente a la Teoría de Juegos) para estudiar los subconjuntos de los reales.

Observemos primero que si el conjunto A es numerable, entonces el jugador P tiene una estrategia ganadora. En efecto, sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de A (posiblemente con repeticiones). Hagamos $\alpha(\emptyset) = a_1$ y $\alpha(I_1, \ldots, I_n) = a_{n+1}$ para cualquier sucesión $I_1, \ldots, I_n$ de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Evidentemente, la función α es una estrategia del jugador P. Si este jugador aplica α en un partido $H = \{\langle x_n; I_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ entonces $a_n = x_n$ y por lo tanto $a_n \in I_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. La consecuencia inmediata es que $A \subset \bigcup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, P gana en el partido H. De modo que α es una estrategia ganadora para P.

Ahora supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ y el jugador P tiene una estrategia ganadora para el conjunto A en el juego de Galvin–Telgársky en $\mathbb{R}$. ¿Cómo tiene que ser A? ¿Será numerable? Esto es cierto, pero la demostración ya no es tan fácil. Vamos a presentar esta demostración para dar una idea de cómo se obtienen implicaciones de existencia de una estrategia ganadora.

Supongamos que α es una estrategia ganadora para el jugador P con respecto a un conjunto A y consideremos la familia $\mathcal{Q}$ de todos los intervalos (con extremos) racionales. La función α nos proporciona el punto $x_1 = \alpha(\emptyset)$ y el punto $\alpha(I_1, \ldots, I_n)$ para cualquier sucesión finita $(I_1, \ldots, I_n)$ de los elementos de $\mathcal{Q}$. La familia $\mathcal{Q}$ es numerable y por lo tanto el conjunto $B = \{x_1\} \cup \{\alpha(I_1, \ldots, I_n) : n \in \mathbb{N},\ I_j \in \mathcal{Q}$ para todo $j = 1, \ldots, n\}$ es también numerable. Esto muestra que es suficiente probar que $A \subset B$.

Supongamos, con tal de llegar a una contradicción, que A no está contenido en B; entonces es posible elegir un punto $z \in A \backslash B$. Vamos a construir un partido H en el cual el jugador P aplica la estrategia α. Estamos obligados a comenzar con $x_1 = \alpha(\emptyset) \in B$. Recordando que $z \in A \backslash B$ por lo cual $z \neq x_0$, podemos tomar un intervalo racional I_1 tal que $x_1 \in I_1$ y $z \notin I_1$. El jugador P realizará la jugada $x_2 = \alpha(I_1)$. Procediendo por inducción supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y tenemos las jugadas $x_1, \ldots, x_{n+1}$ del jugador P así como las jugadas $I_1, \ldots, I_n$ del jugador I efectuadas de tal manera que $z \notin I_1 \cup \ldots \cup I_n$, cada I_j es un intervalo racional (es decir $I_j \in \mathcal{Q}$) y $x_{j+1} = \alpha(I_1, \ldots, I_j) \in B$ para cualquier $j \leq n$, es decir el jugador P aplica la estrategia α.

Tenemos que $x_{n+1} = \alpha(I_1, \ldots, I_n) \in B$ por la definición del conjunto B. De aquí $x_{n+1} \neq z$; consecuentemente, es posible elegir un intervalo racional I_{n+1} de tal manera que $x_{n+1} \in I_{n+1}$ y $z \notin I_{n+1}$. Por lo tanto, nuestro procedimiento inductivo puede llevarse a cabo para todo $n \in \mathbb{N}$ dándonos un partido $H = \{\langle x_n; I_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ donde el jugador P aplica la estrategia α y $z \notin I_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $z \in A$ no pertenece al conjunto $\bigcup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, es decir, el jugador P pierde en el partido H. Esta contradicción con el hecho de que α es una estrategia ganadora nos demuestra que $A \subset B$ y por lo tanto A es numerable. Lo que se logró se puede resumir de la siguiente manera.

Teorema 1. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es numerable si y sólo si el jugador P tiene una estrategia ganadora para A en el juego de Galvin–Telgársky.*

Como podemos ver, el Teorema 1 caracteriza los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ en términos de existencia de estrategia ganadora del jugador P en el juego de Galvin–Telgársky. Esto no nos da mucha información nueva sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$ ya que los subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$ forman un objeto bastante sencillo. Sin embargo, el mismo planteamiento en espacios topológicos arbitrarios brinda resultados muy profundos e informativos.

Por otra parte, ni siquiera con los subconjuntos de $\mathbb{R}$ se logró obtener una clasificación completa con respecto a existencia de una estrategia ganadora del jugador I en el juego de Galvin–Telgársky. Las demostraciones de los resultados pertinentes ya están fuera del alcance del presente artículo pero es útil formularlos para ver la profundidad del estudio que obtenemos con los métodos de la Teoría de Juegos hasta en el caso de los subconjuntos de los reales.

Una estrategia del jugador I es una función β que asigna a cada sucesión no vacía $x_1, \ldots, x_n$ de puntos de $\mathbb{R}$ un intervalo $I_n = \beta(x_1, \ldots, x_n)$ de tal manera que $x_n \in I_n$. Se dice que el jugador I aplica una estrategia β en un partido $\{\langle x_n; I_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ si $I_n = \beta(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Igual que antes, la estrategia β es *ganadora* para el jugador I con respecto a un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ si el mismo gana en cualquier partido donde aplica la estrategia β.

Análogamente, podemos preguntar ¿para cuáles $A \subset \mathbb{R}$ el jugador I tiene estrategia ganadora con respecto a A? La respuesta completa todavía no se ha logrado. Veamos a grandes rasgos cuál es la situación aquí.

Es útil observar que I tiene estrategia ganadora para $A = \mathbb{R}$. En efecto, sea $\beta(x_1, \ldots, x_n) = (x_n - 2^{-n}, x_n + 2^{-n})$ para cualquier sucesión $x_1, \ldots, x_n$ de puntos de $\mathbb{R}$. Si $H = \{\langle x_n, I_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ es un partido donde I aplica la estrategia β entonces la suma de las medidas de los intervalos I_n es igual a $2\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n} = 2$ y por lo tanto la medida de conjunto $U = \bigcup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es a lo más 2 por lo cual $U \neq \mathbb{R}$, es decir, el jugador I gana en el partido H. Una modificación evidente del razonamiento anterior demuestra que se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2. *Si $A \subset \mathbb{R}$ y la medida lineal de Lebesgue de A es positiva entonces el jugador I tiene una estrategia ganadora en el juego de Galvin–Telgársky para el conjunto A.*

Acordándonos de que, por el Teorema 1, el jugador P no tiene estrategia ganadora si $A \subset \mathbb{R}$ es no numerable, vemos que es natural preguntar si el jugador I tiene una estrategia ganadora para cualquier conjunto no numerable $A \subset \mathbb{R}$. La respuesta ya tiene que involucrar los hechos muy profundos de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica. Galvin probó en [Ga] que *existen modelos de la Teoría usual de Conjuntos llamada ZFC en los cuales el jugador I tiene estrategia ganadora para cualquier conjunto no numerable $A \subset \mathbb{R}$.*

Por otra parte, si se supone el cumplimiento del Axioma de Martin junto con la negación de la Hipótesis del Continuo (esta combinación de axiomas es también compatible con ZFC) entonces *existen subconjuntos no numerables de $\mathbb{R}$ para los cuales el jugador I no tiene estrategia ganadora.* Esto también fue establecido en el artículo [Ga].

En otras palabras, el hecho de que el jugador I tenga una estrategia ganadora para cualquier conjunto no numerable $A \subset \mathbb{R}$ no depende de la Teoría usual de Conjuntos.

El autor espera que con este breve ensayo logre mostrar que las técnicas de la Teoría de Juegos brindan herramientas muy poderosas en Topología que dan unos nuevos métodos de estudio hasta en el caso de los subconjuntos de la recta real e incluso para esos subconjuntos se tienen problemas abiertos naturales e interesantes. De modo que el lector puede visualizar, de manera geométrica y transparente, como se llega a la frontera del conocimiento topológico por medio de la Teoría de Juegos.

Bibliografía

[Ga] F. Galvin, *Indeterminacy of point-open games,* Bull. Acad. Polon. Sci., **26:5**(1978), 445–449.

[Te] R. Telgársky, *Spaces defined by topological games,* Fund. Math., **88**(1975), 193–223.

[Tk] V. Tkachuk, *Aplicaciones Topológicas de la Teoría de Juegos (en ruso),* Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, Moscú, 1992.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES
Fabián M. Hernández Arellano

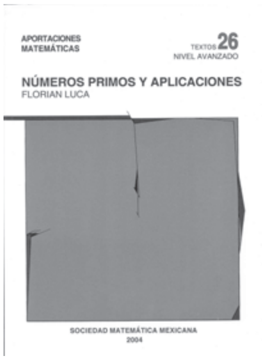
Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana
(Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 25, nivel elemental, 2003).

Fruto de impartir cátedra por 17 años y más de 25 años de experiencia en Estadística Aplicada, le ofrezco al estudiante mexicano un texto nuevo sobre el Cálculo de Probabilidades.

El propósito de haber escrito el libro fue el de simplificarle la vida al estudiante al juntar en un solo volumen los aspectos teóricos y prácticos de la disciplina. En consecuencia, el volumen está escrito en un estilo sencillo pero a la vez riguroso y siempre teniendo en mente al lector. El texto incluye 178 ejemplos, 54 gráficas, 32 tablas (que ejemplifican los cálculos) y 354 ejercicios.

Aunque el texto es de nivel introductorio, se utiliza la Teoría de la Medida para sentar las bases y se provee un fundamento riguroso. No se demuestran todos los resultados mencionados pero cuando una demostración es omitida, se da una referencia donde el lector podrá encontrarla. El libro incluye 4 Apéndices; siendo dos de carácter técnico. El apéndice al capítulo 3 tiene una sección sobre sucesiones y series que espero ayude al lector a incrementar su comprensión.

Las tablas y las gráficas son un esfuerzo por mostrar al lector el orden de magnitud de las probabilidades, el grado de la bondad de una aproximación, mostrar el comportamiento de alguna variable; en fin, entender mejor qué está sucediendo. El descubrir patrones es enfatizado en distintas partes del texto e invito al lector a que se anime a contribuir



NÚMEROS PRIMOS Y APLICACIONES
Florian Luca

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana
(Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 26, nivel avanzado, 2004).

Este libro está basado en una serie de pláticas que el autor dio a los alumnos participantes en la Escuela de Verano del Instituto de Matemáticas de la UNAM en Morelia durante el mes de agosto del 2003. El libro contiene la mayoría de los resultados más importantes en la teoría de la distribución de los números primos, como el Teorema de los Números Primos, primos en progresiones aritméticas, distribución de primos p con $p1$ liso. Se incluyen únicamente las pruebas de los resultados cuya demostración no se encuentra fácilmente en la bibliografía actual, junto con varias aplicaciones al estudio de aquellos enteros positivos sujetos a varias condiciones aritméticas, como serían los pseudoprimos, los números de Carmichael, de Fermat, entre otros.

HIPERESPACIOS DE CONTINUOS
Alejandro Illanes Mejía

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana
(Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 28, nivel medio, 2004).

En topología un hiperespacio es un espacio topológico que consta de una familia particular de subconjuntos de un espacio fijo, a la que se le da una topología apropiada. La Teoría de Hiperespacios nació casi al mismo tiempo que la topología general, a principios del siglo XX y fue estudiada por personajes como el mismísimo Hausdorff.

Este libro contiene una introducción a esta teoría. Se puede usar en los últimos semestres de la carrera de matemático o en el posgrado de Matemáticas. Para leerlo se necesitan conocimientos de topología de espacios métricos incluyendo un buen manejo de las nociones de compacidad y conexidad.

En este libro se pueden encontrar las pruebas más simples (algunas de ellas originales) de las herramientas básicas de la Teoría de Hiperespacios. La teoría que se presenta está acompañada de un gran número de ejercicios, que van desde lo más simple hasta algunos que son verdaderos retos para el lector.

Usted encontrará una discusión completísima de los modelos de hiperespacios. Este tema es de lo más atractivo pues combina de manera muy sabrosa la topología con la geometría. Al final, también se incluye una lista de las obras que alrededor de esta teoría se han hecho por mexicanos o se han producido en México. Viendo esta lista se puede percibir cómo esta teoría ha echado raíces sólidas en nuestro país.

CADENAS DE MARKOV. Un enfoque elemental
María Emilia Caballero, Carlos Velarde, Gerónimo Uribe Bravo, Víctor M. Rivero

Publicado por la Sociedad Matemática Mexicana
(Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 29, nivel medio, 2004).

Una parte importante de la teoría de la probabilidad la constituyen los procesos estocásticos que sirven para modelar la evolución de fenómenos aleatorios en el tiempo. Las Cadenas de Markov son un subconjunto de ellos; son relevantes por sus múltiples aplicaciones y además es la parte más accesible de la teoría general de procesos. A pesar de esto, no es un material elemental, ni fácil de estudiar, lo que se complica aun más porque la mayoría de los libros sobre el tema son o bien muy avanzados, o bien se trata de textos centrados en las aplicaciones que omiten muchas demostraciones. Lo notable de este libro es que logra presentar un panorama amplio del tema de manera rigurosa, con todas las demostraciones de los resultados presentados y esto se hace con métodos elementales para que pueda ser leído por todos aquellos que cuenten con conocimientos equivalentes a los cursos básicos en matemáticas de la mayoría de las carreras científicas. Además de ello, se ha buscado aportar complementos computacionales que apoyen el trabajo teórico y se ha incluido material reciente (cadenas de Markov ocultas) que no aparece, por lo general, en los textos existentes.

CARTA INFORMATIVA

SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 44,
Abril de 2005

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. 5622-4481 / 82
Fax 5622-4479
smm@smm.org.mx