De la ecuación funcional de asociatividad de Abel a la dependencia de variables aleatorias

Arturo Erdely R.
Universidad Anáhuac México Norte

1 La ecuación funcional de asociatividad.

De acuerdo a Aczél (1966) la solución de ecuaciones funcionales es uno de los problemas más antiguos del análisis matemático, y menciona a D'Alembert, Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Darboux y Hilbert entre los grandes matemáticos que se han ocupado del estudio y métodos de solución de ecuaciones funcionales.

Alsina, Frank y Schweizer (2006) afirman que, en particular, la historia de la ecuación funcional de asociatividad comienza con Abel (1826) cuando demostró que si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable y satisface el sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{aligned} f(x,f(y,z)) &= f(z,f(x,y)) = f(y,f(z,x)) = f(x,f(z,y)) \\ &= f(z,f(y,x)) = f(y,f(x,z)) \end{aligned}$$

entonces existe una función diferenciable e invertible $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\psi(f(x,y)) = \psi(x)+\psi(y)\,.$$

Este resultado no tuvo mayor atención por parte de la comunidad matemática durante el resto del siglo XIX, y tuvo que esperar a que Hilbert (1900) en su famoso discurso en el Congreso Internacional de Matemáticas de París le diera un nuevo impulso vía el Problema Núm. 5, en cuya segunda parte Hilbert hace referencia al trabajo de Abel y propone estudiar la solución de este tipo de ecuaciones sin el supuesto de diferenciabilidad. A partir de entonces una gran cantidad de trabajos se publicaron en relación a la ecuación funcional de asociatividad. Por ejemplo, en 1949 Aczél publicó el siguiente resultado:

Teorema 1 (Aczél). *Sea J un intervalo abierto o semiabierto (pero no cerrado) y sea $f:J\times J\to J$ una función continua, estrictamente creciente en cada variable, y asociativa, es decir:*

$$f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))\,,$$

para cualesquiera x, y, z en J. Entonces existe una función ψ definida, continua y estrictamente monótona en J tal que:

$$f(x,y) = \psi^{-1}(\psi(x)+\psi(y))\,.$$

Como consecuencia imediata de lo anterior, f resulta simétrica (conmutativa).

Ling (1965) se interesó en el resultado de Aczél (1949) y obtuvo un resultado análogo sustituyendo la hipótesis de una función estrictamente creciente en cada variable por no decreciente:

Teorema 2 (Ling). *Sea J un intervalo cerrado $[\,a,b\,]$ en el conjunto extendido de los números reales, y sea $f:J\times J\to J$ una función asociativa que satisface las siguientes condiciones:*

a) *f es continua,*

b) *f es no decreciente en cada variable,*

c) *$f(b,x)=x$ para todo x en J,*

d) *$f(x,x)<x$ para toda x en el interior de J.*

Entonces existe una función continua y estrictamente decreciente $\psi:J\to[\,0,\infty\,]$ tal que

$$f(x,y) = \psi^{(-1)}(\psi(x)+\psi(y))\,,$$

en donde $\psi^{(-1)}$ es la pseudo-inversa de ψ dada por

$$\psi^{(-1)}(x) := \begin{cases} b & \text{si } x\in[\,0,\psi(b)\,]\,,\\ \psi^{-1}(x) & \text{si } x\in[\,\psi(b),\psi(a)\,]\,,\\ a & \text{si } x\in[\,\psi(a),\infty\,]\,. \end{cases}$$

En lo anterior, a ψ se le conoce como *generador aditivo* de f. En realidad el teorema anterior es parte de la disertación doctoral de Ling, y más tarde la misma Ling (1965) demostró que su teorema se podía deducir a partir de los resultados de Wallace (1955), Faucett (1955), Mostert y Shields (1957), todos en el área de semigrupos topológicos. Si consideramos a f como una operación binaria y asociativa sobre J tenemos que (J,f) es un semigrupo. Las f-potencias de $x\in J$ son los elementos de J dados recursivamente por

$$x^1 := x \quad , \qquad x^{n+1} := f(x^n,x)\,, \quad n=1,2,\ldots$$

Un semigrupo (J,f) que satisface las condiciones del Teorema de Ling es un *semigrupo arquimediano* ya que se puede demostrar que en tal caso para cualesquiera x,y en el interior de J existe un entero positivo m tal que $x^m<y$.

Poco antes de la publicación de los resultados de Ling (1965), Schweizer y Sklar (1963) habían demostrado, en otro contexto (normas triangulares), cómo construir semigrupos arquimedianos a partir de un generador aditivo dado:

Teorema 3 (Schweizer y Sklar). *Sean* $[\,a,b\,]$ *un intervalo cerrado y acotado,* $\psi:[\,a,b\,]\to[\,0,\infty\,]$ *una función continua y estrictamente decreciente,* $\psi^{(-1)}:[\,0,\infty\,]\to[\,a,b\,]$ *la pseudo-inversa de* ψ*, y sea la función* $f_\psi:[a,b]^2\to[a,b]$ *definida por*

$$f_\psi(x,y):=\psi^{(-1)}(\psi(x)+\psi(y))\,.$$

Entonces $(\,[\,a,b\,],f_\psi)$ *es un semigrupo arquimediano (y conmutativo).*

2 Espacios métricos probabilísticos y t-normas.

De acuerdo a Schweizer y Sklar (1983, 2005) fue Karl Menger quien, después de un extenso trabajo en la teoría de espacios métricos, propuso una generalización probabilística de esta teoría. Dado un espacio métrico (S,d) y p,q dos elementos de S, Menger (1942) propuso sustituir el número $d(p,q)$ por una función real $F_{p\,q}$ cuyo valor $F_{p\,q}(x)$, para cualquier número real x, fuese interpretado como la probabilidad de que la distancia entre p y q sea menor que x. Esto implica que

$$0\,\le\,F_{p\,q}(x)\,\le\,1\,,\ \text{para todo}\ x\,, \tag{1}$$

$$\text{si}\ x\,<\,y\ \text{entonces}\ F_{p\,q}(x)\,\le\,F_{p\,q}(y)\,, \tag{2}$$

$$F_{p\,q}(0)\,=\,0\,, \tag{3}$$

$$\text{si}\ p\,=\,q\ \text{entonces}\ F_{p\,q}(x)\,=\,1\ \text{para todo}\ x>0\,, \tag{4}$$

$$\text{si}\ p\,\neq\,q\ \text{entonces}\ F_{p\,q}(x)\,<\,1\ \text{para algún}\ x>0\,, \tag{5}$$

$$F_{p\,q}\,=\,F_{qp}\,. \tag{6}$$

Sin embargo, la generalización probabilística de la desigualdad del triángulo no era un asunto menor, y se convirtíó en un tema central en el desarrollo de esta teoría. Menger (1942) definió *espacio métrico probabilístico* como un conjunto no vacío S asociado a una familia de funciones $F_{p\,q}$ (de hecho, funciones de distribución de probabilidad) que satisfagan las condiciones (3) - (6) y la desigualdad

$$F_{p\,r}(x+y)\,\ge\,T(F_{p\,q}(x),F_{qr}(y))\,, \tag{7}$$

para cualesquiera p,q,r en S y cualesquiera x,y números reales. Aquí $T:[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]\to[\,0,1\,]$ es una función que satisface:

$$T(a,b)\,=\,T(b,a)\,, \tag{8}$$

$$T(a,b)\,\le\,T(c,d)\quad\text{siempre que}\ a\le c\,,\,b\le d\,, \tag{9}$$

$$T(a,1)\,>\,0\quad\text{siempre que}\ a>0\,,\,T(1,1)=1\,. \tag{10}$$

Dadas las condiciones (8) - (10), la desigualdad (7) implica que: nuestra información sobre un lado del triángulo depende de manera simétrica de nuestra información sobre los otros dos lados; que dicha información se incrementa, o por lo menos no decrece, si nuestra información sobre los otros dos lados se incrementa; que si tenemos una cota superior para la longitud de un lado y sabemos algo acerca de otro lado, entonces sabemos algo acerca del tercer lado; que si tenemos cotas superiores para las longitudes de dos lados tenemos entonces una cota superior para la longitud del tercer lado. En particular, si existe una función $d:S\times S\to[\,0,\infty)$ tal que:

$$F_{p\,q}(x)=\begin{cases}0\,, & x\,\le\,d(p,q)\,,\\ 1\,, & x\,>\,d(p,q)\,,\end{cases} \tag{11}$$

para cualesquiera p,q en S y para todo número real x, es fácil verificar que (S,d) es un espacio métrico. Más aún, si (S,d) es un espacio métrico dado y las funciones $F_{p\,q}$ se definen como en (11), es inmediato verificar que las condiciones (1) - (7) se satisfacen para cualquier T que satisfaga (8) - (10), así que los espacios métricos ordinarios pueden verse como casos particulares de los espacios métricos probabilísticos definidos por Menger (1942).

De acuerdo a Klement y Mesiar (2005) fue hasta que Schweizer y Sklar (1958) publicaron una serie de axiomas para *normas triangulares* (o brevemente *t-normas*) que creció de manera importante el interés en espacios métricos probabilísticos, encontrándose aplicaciones aun fuera del ámbito probabilístico, por ejemplo en áreas como lógica, álgebra y teoría de medidas no aditivas.

Definición 1 (Schweizer y Sklar). Una *t-norma* es una operación binaria, conmutativa, asociativa y monótona sobre el intervalo $[\,0,1\,]$ con 1 como elemento neutro, es decir, es una función $T:[\,0,1\,]^2\to[\,0,1\,]$ tal que para cualesquiera x,y,z en $[\,0,1\,]$ satisface:

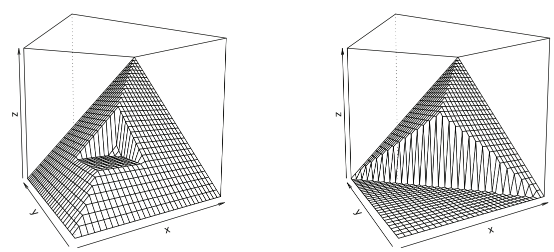
(T1) $T(x,y)\,=\,T(y,x)\,,$

(T2) $T(x,T(y,z))\,=\,T(T(x,y),z)\,,$

(T3) $T(x,y)\,\le\,T(x,z)$ siempre que $y\,\le\,z\,,$

(T4) $T(x,1)=x\,.$

A continuación, presentamos algunos ejemplos de t-normas:



Las condiciones (T1), (T3) y (T4) implican que para todo x en $[\,0,1\,]$ cualquier t-norma T satisface $T(0,x)\,=\,T(x,0)\,=\,0$ y $T(1,x)=x$, esto es que todas las t-normas coinciden en la frontera del cuadrado unitario $[\,0,1\,]^2$. Si además $(\,[\,0,1\,],T)$ es un semigrupo arquimediano y T es continua se dice entonces que T es una *t-norma arquimediana.* De hecho se puede demostrar que toda t-norma continua es arquimediana si y sólo si $T(x,x)<x$ para todo x en el intervalo abierto $(0,1)$. Algunos ejemplos importantes de t-normas son los siguientes:

$$T_D(x,y)=\begin{cases}0\,, & \text{si}\ (x,y)\in[\,0,1)^2\,,\\ \min(x,y)\,, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

$$T_W(x,y)=\max(x+y-1,0)\,,T_\Pi(x,y)=xy$$
$$T_M(x,y)=\min(x,y)\,.$$

De estas t-normas, sólo T_D es discontinua, y sólo T_W y T_Π son arquimedianas. Es posible definir un orden parcial en el conjunto $\mathcal{T}$ de todas las t-normas, denotando $T_1\prec T_2$ si $T_1(x,y)\le T_2(x,y)$ para todo $(x,y)\in[\,0,1\,]^2$ y $T_1(x_0,y_0)<T_2(x_0,y_0)$ para algún $(x_0,y_0)\in[\,0,1\,]^2$. Si $T_1\prec T_2$ o bien $T_1=T_2$ escribimos $T_1\preccurlyeq T_2$. Se puede demostrar que

$$T_D\,\prec\,T_W\,\prec\,T_\Pi\,\prec\,T_M\,, \tag{12}$$

y más aún, que T_D y T_M son, respectivamente, el ínfimo y el supremo del conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{T}, \preccurlyeq)$. El Teorema 2 (Ling) de la sección anterior implica que para toda t-norma arquimediana T existe una función continua y estrictamente decreciente $\psi : [\,0,1\,] \to [\,0,\infty\,]$, $\psi(1) = 0$, tal que

$$T(x,y) = \psi^{(-1)}(\psi(x) + \psi(y))\,, \tag{13}$$

y por el Teorema 3 (Schweizer y Sklar) tenemos que, dada una función ψ con dichas características, la función T definida por (13) es una t-norma arquimediana. Así, por ejemplo, la t-norma T_W tiene por generador aditivo a $\psi_W(x) = 1 - x$ mientras que T_Π tiene por generador aditivo a $\psi_\Pi(x) = -\log x$.

3 Cópulas y variables aleatorias.

De acuerdo a Schweizer (1991) y Sklar (1996), estando Berthold Schweizer trabajando en espacios métricos probabilísticos bajo la dirección de Karl Menger en el Illinois Institute of Technology, en 1956 conoció y convenció a Abe Sklar para que trabajaran juntos en este tema, colaboración que perdura hasta el día de hoy. Su trabajo los llevó a iniciar un intercambio de correspondencia con Maurice Fréchet, quien entre otras cosas estudiaba el problema de determinar la relación entre la función de distribución de probabilidad multivariada y sus marginales. El trabajo en este sentido tuvo como fruto el ahora conocido como Teorema de Sklar (1959), trabajo en el que se acuñó y definió el concepto de *cópula.*

Definición 2 (Sklar). Una *cópula bivariada* es una función $C : [\,0,1\,]^2 \to [\,0,1\,]$ que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cualesquiera u, v en $[\,0,1\,]$

$$C(u,0) \;=\; 0 \;=\; C(0,v)\,, \tag{14}$$

$$C(u,1) \;=\; u\,,\; C(1,v) \;=\; v\,; \tag{15}$$

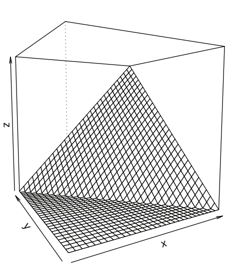
2. Para cualesquiera u_1, u_2, v_1, v_2 en $[\,0,1\,]$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$

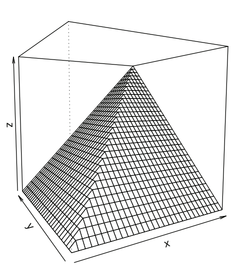
$$C(u_2,v_2) \;-\; C(u_2,v_1) \;-\; C(u_1,v_2) \;+\; C(u_1,v_1) \;\geq\; 0\,. \tag{16}$$

La definición anterior implica que una cópula C es no decreciente en cada variable (utilice $v_1 = 0$ o $u_1 = 0$ en (16)) y es uniformemente continua (ya que se satisface la condición de Lipschitz $|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$). Es inmediato verificar que toda cópula satisface

$$T_W(u,v) \;\leq\; C(u,v) \;\leq\; T_M(u,v)\,, \quad \text{para todo } (u,v) \in [\,0,1\,]^2\,, \tag{17}$$

y que las t-normas T_W y T_M son de hecho cópulas también, y se les conoce como *cotas de Fréchet-Hoeffding.* Sus gráficas son las siguientes:





Cabe mencionar que la t-norma T_Π es también una cópula. A continuación presentamos tres definiciones necesarias para enunciar el Teorema de Sklar:

Defnición 3. Una *función de distribución* es una función F con dominio $[-\infty, +\infty\,]$ tal que F es no decreciente, $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$.

Definición 4. Una *función de distribución conjunta bivariada* es una función H con dominio $[-\infty, +\infty\,]^2$ tal que:

1. Para cualesquiera x_1, x_2, y_1, y_2 en $[-\infty, +\infty\,]$ tal que $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$

$$H(x_2,y_2) \;-\; H(x_2,y_1) \;-\; H(x_1,y_2) \;+\; H(x_1,y_1) \;\geq\; 0\,;$$

2. $H(x,-\infty) \;=\; 0 \;=\; H(-\infty,y)\,,\; H(+\infty,+\infty) \;=\; 1\,.$

Definición 5. Las *marginales* de una función de distribución conjunta bivariada H son las funciones F y G definidas por $F(x) := H(x,+\infty)$ y $G(y) := H(+\infty,y)$.

Es consecuencia inmediata de las tres definiciones anteriores que las marginales de H resultan ser funciones de distribución. Al respecto Nelsen (1999, 2006) comenta: "Notemos que no hay nada de probabilístico en las definiciones anteriores. No se mencionan variables aleatorias ni continuidad por la derecha o la izquierda. Todas las funciones de distribución (de probabilidades) de una o dos variables aleatorias usualmente encontradas en estadística satisfacen alguna de las definiciones anteriores. Así que los resultados que se obtengan para dichas funciones resultarán válidos para el caso particular de variables aleatorias, independientemente de las restricciones adicionales que se impongan."

Teorema de Sklar (1959). *Sea H una función de distribución conjunta bivariada con marginales F y G. Entonces existe una cópula C tal que*

$$H(x,y) \;=\; C(F(x),G(y))\,, \quad \textit{para todo } (x,y) \in [-\infty,+\infty\,]^2\,. \tag{18}$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; de otro modo, C está determinada de manera única sobre $Ran\,F \times Ran\,G$. También, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida mediante (18) es una función de distribución conjunta bivariada con marginales F y G.

En donde $Ran\,F$ y $Ran\,G$ significan respectivamente el rango de F y G. La segunda parte del Teorema de Sklar resulta especialmente relevante en probabilidad ya que proporciona una herramienta útil para la construcción de distribuciones de probabilidad de vectores aleatorios con marginales dadas, quedando entonces en la cópula la información acerca de la estructura de dependencia entre las variables aleatorias involucradas. Las cópulas han resultado especialmente útiles para modelar dependencias no lineales.

Comparando las definiciones y su consecuencias tenemos que toda t-norma que además cumpla la condición (16) es una cópula. Por otro lado, si una cópula C es asociativa entonces es una t-norma (continua). Si además $C(u,u) \;<\; u$ para todo u en el intervalo abierto $(0,1)$ entonces C es una t-norma arquimediana, y por ello en tal caso se denomina *cópula arquimediana.* Por el Teorema 2 (Ling) tenemos que para toda cópula arquimediana C existe una función continua y estrictamente decreciente $\psi : [\,0,1\,] \to [\,0,\infty\,]$ tal que

$$C(u,v) \;=\; \psi^{(-1)}(\psi(u) + \psi(v))\,. \tag{19}$$

Sin embargo, el Teorema 3 (Schweizer y Sklar) sólo nos garantiza que dada una función continua y estrictamente decreciente $\psi : [\,0,1\,] \to [\,0,\infty\,]$ tal que $\psi(1)=0$, la función C obtenida mediante (19) es una t-norma arquimediana, hace falta agregar una condición adicional sobre ψ para garantizar que se obtenga una cópula: que ψ sea una función convexa, véase Alsina, Frank y Schweizer (2006). Así, por ejemplo, dado que los generadores aditivos de la t-normas T_W y T_Π son, respectivamente, $\psi_W(x) = 1-x$ y $\psi_\Pi(x) = -\log x$, que son claramente funciones convexas, tenemos entonces que T_W y T_Π son cópulas arquimedianas. Nelsen (1999, 2006) incluye un catálogo de diversos generadores aditivos que permiten construir diversas familias paramétricas de cópulas arquimedianas, mismas que han contribuido a su vez en incrementar de manera importante el catálogo de distribuciones de probabilidad multivariadas con marginales dadas, ya que, afortunadamente, los principales resultados de cópulas pueden extenderse a dimensiones mayores a 2.

§ Referencias

Abel, N.H. (1826). Untersuchung der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x und y wie $f(x,y)$, welche die Eigenshaft haben, dass $f(z,f(x,y))$ eine symetrische Function von x, y und z ist. *J. Reine Angew. Math.* **1**, 11-15.

Aczél, J. (1949). Sur les opérations définis pour nombres réels. *Bull. Soc. Math. France* **76**, 59-64.

Aczél, J. (1966). *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press (Nueva York).

Alsina, C., Frank, M.J., Schweizer, B. (2006). *Associative Functions: Triangular Norms and Copulas*, World Scientific Publishing Co. (Singapur).

Faucett, W.M. (1955). Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. *Proc. Amer. Math. Soc.* **6**, 741-747.

Hilbert, D. (1900). Sur les problèmes futurs de mathématiques. *Compt. Rend. 2e Congr. Intern. Math., Paris,* 58-114.

Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. (2000). *Triangular Norms*, Kluwer (Dordrecht).

Klement, E.P., Mesiar, R., editores (2005). *Logical, algebraic, analytic, and probabilistic aspects of triangular norms*, Elsevier (Amsterdam).

Ling, C.-H. (1965). Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen* **12**, 189-212.

Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **28**, 535-537.

Mostert, P.S., Shields, A.L. (1957). On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *Ann. of Math.* **65**, 117-143.

Nelsen, R. (1999). *An Introduction to Copulas*, Springer (Nueva York). La segunda edición de esta obra fue publicada en 2006.

Schweizer, B., Sklar, A. (1958). Espaces métriques aléatoires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A* **247**, 2092-2094.

Schweizer, B., Sklar, A. (1963). Associative functions and abstract semigroups. *Publ. Math. Debrecen* **10**, 69-81.

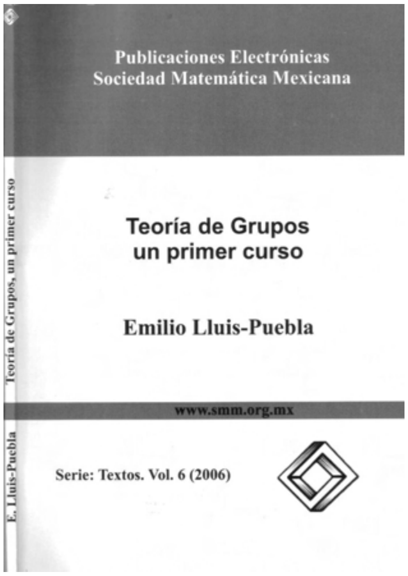
Schweizer, B., Sklar, A. (1983). *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier-North Holland (Nueva York). Esta obra fue nuevamente publicada en 2005 por la editorial Dover (Nueva York), con notas y referencias adicionales de Berthold Schweizer.

Schweizer, B. (1991). Thirty years of Copulas. *Advances in Probability Distributions with Given Marginals; Dall'Aglio, Kotz y Salinetti editores (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht),* 13-50.

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Inst. Statist. Univ. Paris Publ.* **8**, 229-231.

Sklar, A. (1996). Random Variables, Distribution Functions, and Copulas - A Personal Look Backward and Forward. *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics; Rüschendorf, Schweizer and Taylor, editores (Institute of Mathematical Statistics, Hayward CA)* **28**, 1-14.

Wallace, A.D. (1955). The structure of topological semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **61**, 95-112.



Teoría de Grupos, un primer curso

Emilio Lluis-Puebla

Publicaciones Electrónicas. Serie: Textos. Vol. 6 (2006).
Sociedad Matemática Mexicana.

ISBN: 968-9161-14-8 (versión en línea), 968-9161-16-4 (versión en papel), 968-9161-15-6 (versión en CD).

El éxito de la Teoría de Grupos es impresionante y extraordinario. Es quizás, la rama más poderosa e influyente de toda la Matemática. Influye en casi todas las disciplinas científicas, artísticas y en la propia Matemática de una manera fundamental. El concepto de estructura y los relacionados con éste, como el de isomorfismo, juegan un papel decisivo en la Matemática actual.

Este texto contiene el material correspondiente al curso sobre la materia que se imparte en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sigue el enfoque de los otros textos del autor sobre Álgebra Lineal y Álgebra Homológica. En él se escogió una presentación moderna donde se introduce el lenguaje de diagramas conmutativos y propiedades universales, tan requerido en la matemática actual así como en la Física y en la Ciencia de la Computación, entre otras disciplinas.

El texto consta de tres capítulos con cuatro secciones cada uno. Cada sección contiene una serie de problemas que se resuelven con creatividad utilizando el material expuesto, mismos que constituyen una parte fundamental del texto. Tienen también como finalidad, la de permitirle al estudiante redactar matemática.

El libro está diseñado para un primer curso sobre la Teoría de Grupos el cual se cubre en su totalidad en cuarenta horas de clase. El autor ha decidido incluir este texto dentro de las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana con el ánimo de predicar con el ejemplo y mostrar (como matemático y Editor Ejecutivo) la confianza en este tipo de publicación.

Las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana constituyen una biblioteca de libre acceso para toda la comunidad matemática del país y del mundo. Consta de cuatro series: Textos, Memorias, Divulgación y Cursos.

Los libros pueden adquirirse por solicitud en dos versiones: en papel con cubierta plastificada y en CD.

La serie Textos consta de dos tipos de libros: por un lado, libros de texto nuevos escritos expresamente para este medio y por otro, libros que han sido utilizados por generaciones durante años y que terminaron su venta por otras casas editoras.

La serie Memorias deja establecido por escrito los trabajos presentados en las diversas reuniones matemáticas, en especial donde la Sociedad Matemática Mexicana tiene presencia.

La serie Divulgación consiste de una colección de libros para motivar a niños, jóvenes y adultos a estudiar y apreciar la Matemática y su comunidad. También incluye libros de difusión de la Matemática de todos los niveles para estudiantes y profesores de Matemática.

La serie Cursos desea presentar diversos cursos que se hayan realizado en los Congresos de la Sociedad u otras reuniones.

Es de hacer notar que las Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana no le generan ningún gasto a nuestra Sociedad. Son autosuficientes y proporcionan un servicio a la comunidad (matemática en particular) de todo el mundo.

La Sociedad Matemática Mexicana conjuntamente con la generosidad de los autores ofrecen un regalo a la comunidad matemática y público en general, de cualquier parte del planeta, el cual contribuye a la formación de la cultura científica. Basta con que el lector se conecte a la página en internet de la Sociedad Matemática Mexicana www.smm.org.mx y acceda a las Publicaciones Electrónicas..

Emilio Lluis-Puebla

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
lluisp@servidor.unam.mx

"IV Congresso Iberoamericano de Geometria Complexa"
Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil,
August 12-17, 2007.

Organizing Committe
Dan Avritzer(Chair)
Abramo Hefez
Eduardo Esteves
Jorge Vitório Pereira
Márcio Gomes Soares

Scientific Committee
* L. Brambilla Paz
* C. Camacho
* F. Cano
* H. Clemens
* A. Dickenstein
* X. Gomez Mont
* J. Maria Porras
* M. Mendes Lopes
* S. Popescu
* R. Rodriguez
* J. Seade
* A. Simis
* I. Sols
* S. Xambó-Descamps

Themes

1-Automorphic forms, theta functions and modular forms
2-Complex dynamics and holomorphic foliations
3-Algebraic curves and their moduli
4-Vector bundles and their moduli
5-Intersection theory and enumerative geometry
6-Singularity theory
7-Classical projective geometry
8-Computational methods in algebraic geometry and commutative algebra

Plenary Talks
F. Cano (Spain)
A. Dickenstein (Argentina)
L. Dung-Trang(Italy)
O. Garcia-Prada (Spain)
X. Gomez-Mont (Mexico)
V. González(Chile)
H. Lange (Germany)
A. Lins Neto (Brasil)
I. Luengo (Spain)
M. Mendes-Lopes (Portugal)
R. Miatello (Argentina)
M. Popa (USA)
M. A. Ruas (Brasil)
F. Russo (Brasil)
A. Simis (Brasil)
I. Sols (Spain)
I. Vainsencher (Brasil)
C. Voisin (France)

The "Congresso Iberoamericano de Geometria" takes place approximately every three years. The first edition was in Chile, the second in Mexico and the third in Spain in 2004. Its aim is to congregate mathematicians from the iberian peninsula and the americas. Mathematicians from all countries are, of course, welcome.

Ouro Preto is a small tourist town 100 km south of Belo horizonte and about 450 km north of Rio de janeiro. It was built in the XVIII century and still keeps an original look.

Further information and application:
http://www.mat.ufmg.br/~ibero/

Hope to see you all in Ouro Preto.

Saudações matemáticas,

The organizing committee

Resultados de México en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas 2006

MATEMÁTICAS

En lo que va del año, nuestro país ha participado en tres olimpiadas internacionales, siendo la más importante la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO). La Olimpiada Internacional de Matemáticas se lleva a cabo desde 1959 y hoy constituye el concurso de matemáticas más importante a nivel mundial. Actualmente se invitan, a participar en la IMO, a más de 90 países de los cinco continentes. La delegación que representa a cada país está integrada por 6 alumnos preuniversitarios que son elegidos mediante concursos nacionales. El pasado mes de julio en Ljubljana, Eslovenia, tuvo lugar la 47ª Olimpiada Internacional de Matemáticas con la participación de noventa países. México, que participa en la IMO desde 1988, ocupó el vigésimo cuarto lugar y obtuvo por primera vez una Medalla de Oro. Este año la delegación estuvo integrada por los alumnos: Marco Antonio Ávila Ponce de León (Yucatán), Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Guevara Manuel Guevara López (Zacatecas), Iván Joshua Hernández Máynez (Coahuila), Aldo Pacchiano Camacho (Morelos) y Pablo Soberón Bravo (Morelos), y los profesores Radmila Bulajich (Presidenta del Comité Organizador de la OMM) y Humberto Montalván (Miembro del Comité Organizador de la OMM y Coordinador de los entrenamientos).

El equipo obtuvo los mejores resultados que ha tenido un equipo mexicano en este certamen. Pablo Soberón obtuvo medalla de oro, Isaac Buenrostro y Joshua Hernández obtuvieron cada uno medalla de plata, Manuel Guevara ganó medalla de bronce y Aldo Pacchiano se acreditó una mención honorífica.

Para dimensionar el enorme éxito de nuestra delegación en Eslovenia, vale la pena mencionar algunos resultados obtenidos en años anteriores. Hasta ahora los mejores lugares obtenidos como país son: el lugar 31 (de entre 91 países), obtenido el año pasado en la 46ª IMO realizada en México, y el lugar 32 (de entre 82 países) en la 41ª IMO realizada en el año 2000 en Corea. En cuanto a medallas, los alumnos de las delegaciones mexicanas habían logrado hasta el año 2005: 20 menciones honoríficas, 28 medallas de bronce y 3 medallas de plata.

Por otro lado, del 29 de julio al 5 de agosto, se celebró en Panamá la VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación que representa a cada país está integrada por 3 alumnos cuya edad no rebasa los 16 años. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos José Daniel Ríos (Querétaro), Paul Gallegos (Jalisco) y Andrés Gómez (Distrito Federal), y los profesores María Eugenia Guzmán (Delegada del Estado de Jalisco) y Hugo Villanueva (Entrenador de las delegaciones internacionales).

Los alumnos José Daniel (examen perfecto) y Paul obtuvieron medalla de oro, y Andrés una medalla de plata. México ocupó el primer lugar entre los doce países participantes (Honduras, Guatemala, Nicaragua, El Salvador, Costa Rica, Panamá, Colombia, Venezuela, Cuba, Puerto Rico, República Dominicana y México).

Durante el mes de marzo los alumnos que se encontraban en ese momento en los entrenamientos participaron en la Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. A diferencia de las olimpiadas anteriores, esta olimpiada se lleva a cabo por correo. El examen es elaborado y calificado por el país sede, en este caso Corea. Este año participaron diez alumnos: Guevara Manuel Guevara López (Zacatecas), Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Iván Joshua Hernández Máynez (Coahuila), Pablo Soberón Bravo (Morelos), David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato), Luna Valente Ramírez García (San Luís Potosí), Jesús Aarón Escalera Rodríguez (Nuevo León), Fernando Campos García (D.F.), Rodrigo Mendoza Orozco (Jalisco), Jan Marte Contreras Ortiz (Jalisco).

Guevara Juan Manuel obtuvo medalla de oro, Isaac y Joshua obtuvieron medallas de plata, Pablo y David recibieron medalla de bronce. Las menciones honoríficas fueron para: Valente, Aarón, Fernando, Rodrigo y Jan. En esta ocasión México se colocó en el décimo lugar de los veintiún países participantes.

Actualmente, una delegación de cuatro alumnos se prepara para asistir a la XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, que se llevará a cabo en Guayaquil, Ecuador.

AVISOS

Eventos

IX Escuela de Probabilidad y Estadística,
CIMAT, 22 al 26 de enero

Mini cursos:

Gabor Lugosi (Universidad Pompeu Fabra)
Aprendizaje estadístico (Statistical Learning)

Yoonkyung Lee (Ohio State University)
Kernel methods in a regularization framework

Saharon Rosset (IBM)

Conferencias (lista preliminar):

Héctor Geffner (Univ. Pompeu Fabra)
Modelos Markovianos de decisión
Redes Bayesianas y modelos gráficos

Víctor Pérez-Abreu (CIMAT)
Identidades y desigualdades de correlación

Carenne Ludeña (Inst. Venezolano de Invest. Científica)

Miguel Nakamura (CIMAT)

Mariano Rivera (CIMAT)

J. L. Marroquín (CIMAT)
Probabilistic regularization methods for image processing

Mayores informes: epe@cimat.mx

Comité organizador:
Dr. Joaquín Ortega, Dr. Rogelio Ramos, Dr. Víctor Rivero, Dr. Johan Van Horebeek

CARTA INFORMATIVA
SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA
Número 49,
Octubre de 2006

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. 5622-4481 / 82
Fax 5622-4479
smm@smm.org.mx

DISEÑO Y PRODUCCIÓN

S y G editores, SA de CV
Tels. 5619-5293 / 5617-5610
sygeditores@igo.com.mx

PORTADA

Delegación Mexicana
de la Olimipiada Internacional
de Matemáticas