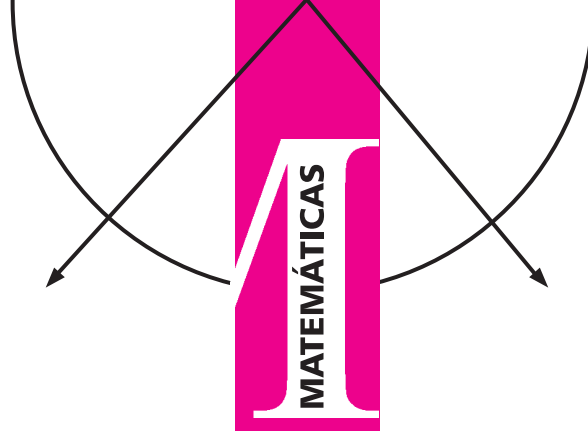


# Vórtices en fluidos y variable compleja



Ernesto A. Lacomba  
Departamento de Matemáticas  
UAM-Iztapalapa  
lace@xanum.uam.mx

## 1. Introducción

**H**ay numerosos ejemplos de vórtices en fluidos. Por ejemplo en los huracanes del Caribe o los ciclones del Pacífico, así como en los tornados que aparecen repentinamente en las grandes planicies sujetas a fuertes vientos en el sur de Estados Unidos y en la Patagonia Argentina. Otros ejemplos son los rápidos o remolinos de un río, o simplemente el remolino que se forma cuando destapamos un lavabo lleno de agua para que se desaloje.

El museo Universum de la UNAM tiene una muy buena ilustración de un vórtice. Se trata de un tubo vertical de vidrio, cerrado y lleno de agua casi hasta el tope, con una manivela para hacerlo girar sobre su eje más y más rápido. Cuando la velocidad es suficientemente grande, aparece el vórtice en la forma de un remolino alrededor del eje del cilindro, como lo veríamos si nos sumergiéramos dentro de un río turbulento.

La dinámica de  $N$  vórtices puntuales de un fluido incompresible no viscoso en el plano, o en cualquier otra superficie, por ejemplo la esfera, se describe por medio de las ecuaciones diferenciales de Hamilton para una función Hamiltoniana adecuada. Este problema presenta muchas analogías, pero también muchas diferencias, con el problema de  $N$  cuerpos en mecánica celeste. Una de las principales diferencias proviene de que se trata de un campo vectorial de velocidades de las partículas del fluido y no de aceleraciones (o fuerzas) como en el caso de mecánica celeste. Esto se traduce matemáticamente en que las ecuaciones de movimiento son de primer orden en las posiciones y no de segundo orden.

Ambos son sistemas Hamiltonianos pero en el caso de vórtices las posiciones son las primeras coordenadas de cada vórtice, mientras que sus variables conjugadas o "momentos lineales" son esencialmente las segundas coordenadas de los vórtices.

Las ecuaciones de movimiento de la interacción de vórtices puntuales fueron introducidas por Helmholtz en un artículo muy importante publicado en 1858 [6]. En este trabajo, Helmholtz fue el primero en hacer explícitas propiedades clave de aquellas porciones de un fluido en las cuales ocurre la vorticidad. Aunque su investigación estaba motivada en parte por su interés en el efecto de la fricción dentro de un fluido, la teoría desarrollada se restringe a la dinámica de un fluido perfecto incompresible con vorticidad. Hacia el final de su artículo, introduce el concepto de filamentos verticales paralelos infinitamente delgados de vórtices, cada uno de los cuales contiene una cantidad invariante de circulación, como describiremos

más adelante. En forma equivalente, podemos considerar la traza de esta familia de filamentos, intersectándolos con un plano perpendicular a todos ellos. Estos puntos de intersección se conocen como vórtices puntuales, y podemos pensar que juegan un papel análogo al de las masas puntuales en mecánica celeste. Se puede ver [11] para una introducción general a todas estas técnicas. Particularmente importante porque muestra muchas conexiones sorprendentes y fascinantes de esta teoría a otras áreas clásicas de las Matemáticas, es el artículo de Aref [1].

El modelo de vórtices puntuales se ha aplicado también a la descripción de vórtices en helio líquido [5], el cual se comporta como superfluido. También ha sido aplicado a superconductores.

Se puede estudiar también el movimiento de vórtices puntuales sobre una superficie, pero el problema de vórtices en la esfera tiene particular importancia por corresponder a un modelo ideal de vórtices sobre la tierra. Véase por ejemplo [12] y las referencias allí consignadas.

Los campos de velocidades de fluidos incompresibles no viscosos en el plano se describen como el campo vectorial gradiente o Hamiltoniano de la parte real o imaginaria de una función holomorfa en una región del plano complejo, o más generalmente una función cuya derivada es holomorfa, como el logaritmo natural. Comenzaremos con los campos de un vórtice y de una fuente puntual en términos del logaritmo, describiendo cómo se extiende a casos más generales. Esta es una alternativa al uso de las ecuaciones de Euler que describen la dinámica de fluidos incompresibles, que conducen a una ecuación de Laplace o de Poisson. Extendiendo a la interacción de  $N$  vórtices para un fluido en el plano, aparece así un Hamiltoniano de tipo logarítmico. Exhibiremos cómo el momento lineal y el momento de inercia son integrales primeras mientras que el virial (momento angular) resulta un invariante del movimiento y cómo tanto las integrales como el invariante provienen de las simetrías del sistema.

Después estudiaremos ejemplos simples de soluciones de equilibrio relativo y finalmente la posibilidad de colisiones de algunos o de todos los vórtices. En particular analizaremos los casos de 2, 3 y 4 vórtices, principalmente los casos integrables (los de 2 y 3 vórtices y algunos casos especiales de 4).

## 2. Campo de velocidades de un vórtice y una fuente puntuales

Es bien conocido que si  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es una función holomorfa para  $z = x + iy$  definida en un dominio  $D$  del plano complejo, las funciones parte real  $u$  y parte imaginaria  $v$  satisfacen en  $D$  las ecuaciones de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1)$$

Esto implica que ambas funciones son *armónicas*, es decir, que ambas satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 v = 0.$$

Debido a (1),  $u$  y  $v$  se llaman *conjugadas armónicas*. Una consecuencia importante es que la familia de curvas  $u = \text{constante}$  es siempre ortogonal a la familia  $v = \text{constante}$  en los puntos de intersección. Usualmente no se consideran los campos vectoriales gradiente y Hamiltoniano en  $D$ , definidos por las funciones  $u$  y  $v$ . Los correspondientes a  $u$  se definen como

$$\text{grad}(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\text{Ham}(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

y análogamente para  $v$ . El gradiente de  $u$  es un campo vectorial siempre ortogonal a las curvas  $u = \text{constante}$ , mientras que  $\text{Ham}(u)$  es siempre tangente a las mismas. Ambos tienen la misma norma en cada punto de  $D$ . Una consecuencia inmediata de las ecuaciones de Cauchy–Riemann es que tenemos exactamente que

$$\text{grad}(u) = \text{Ham}(v), \quad (2)$$

$$\text{Ham}(u) = \text{grad}(v). \quad (3)$$

Estos campos vectoriales definen los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales, que en términos de  $u$  resultan

$$\dot{x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

para el campo vectorial  $\text{grad}(u)$  y

$$\dot{x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4)$$

para el campo vectorial  $\text{Ham}(u)$ . Si pensamos a  $y$  como una variable conjugada (o momento conjugado) para  $x$ , el sistema (4) corresponde a las ecuaciones de Hamilton para la función Hamiltoniana  $u(x, y)$ . Una propiedad importante del campo vectorial Hamiltoniano es que  $\text{div}(\text{Ham}(u)) = 0$ , lo cual implica que el flujo definido por las soluciones del campo vectorial  $\text{Ham}(u)$  preserva el área en  $D$ , hecho que se conoce como Teorema de Liouville. Esta es la base de las aplicaciones de la teoría de variable compleja, y en particular de las transformaciones conformes, al estudio del movimiento de fluidos perfectos en el plano, véase Marsden [10]. La idea es que no sólo las curvas  $u = \text{constante}$  y  $v = \text{constante}$  son mutuamente ortogonales, sino que también los campos vectoriales (2) y (3) son ortogonales en cada punto.

Si consideramos la representación Hamiltoniana, podemos decir que si  $\mathbf{v} = \text{Ham}(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x} \right)$  representa el campo de velocidades de un fluido perfecto, las órbitas recorridas por las partículas del fluido son las curvas  $u = \text{constante}$ , mientras que las soluciones

o movimientos específicos que recorren como función del tiempo son exactamente las soluciones del sistema (4).

Para considerar el campo de velocidades de un vórtice, veamos un caso singular interesante de la descripción anterior. Para esto, consideramos la función  $f(z) = -\Gamma \ln z$  multivaluada en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  donde  $\Gamma \in \mathbb{R}$  es diferente de cero. Si  $z = re^{i\theta}$ , entonces  $f(z) = -\Gamma \ln r - \Gamma i\theta$ , así que la multivaluación aparece sólo en la parte imaginaria porque  $\theta$  está definido módulo  $2\pi$ . Si tomamos  $u = -\Gamma \ln r = -(\Gamma/2) \ln(x^2 + y^2)$ , entonces  $\text{Ham}(u) = \frac{\Gamma}{r^2}(-y, x)$  es un campo de velocidades definido en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  que en cada punto es tangencial a la circunferencia correspondiente con centro el origen, y  $\|\text{Ham}(u)\| = \frac{\Gamma}{r}$ . De hecho, las partículas correspondientes de fluido están recorriendo las circunferencias con velocidad angular  $\frac{\Gamma}{r^2}$ , lo cual significa que la orientación está determinada por el signo de  $\Gamma$ . Aunque tenemos una singularidad en el origen, este campo de velocidades preserva el área en cualquier región que no contenga al origen, como vimos antes. Además, es fácil verificar el valor constante de la integral de línea de la 1-forma diferencial dual del campo vectorial  $\text{Ham}(u)$ , es decir

$$\oint \frac{\Gamma}{x^2 + y^2}(-ydx + xdy) = 2\pi\Gamma,$$

razón por la cual al invariante  $\Gamma$  se le llama *circulación, intensidad del vórtice*, o simplemente *vorticidad*.

Otra manera de obtener las ecuaciones del campo de velocidades de un vórtice es pasando a coordenadas polares y encontrando la solución a la ecuación de Laplace cuando la función armónica no depende explícitamente de la coordenada  $\theta$ , sino simplemente de  $r$ . Se obtiene de nuevo  $-\Gamma \ln r$  como solución, pero notamos que ésta no está definida para  $r = 0$ , que por otro lado es también una singularidad de las coordenadas polares. Se puede verificar entonces que no estamos resolviendo realmente la ecuación de Laplace en el plano, sino la ecuación de Poisson  $\nabla^2 u = f$ , donde la  $f$  del segundo miembro es una función generalizada: la delta de Dirac con intensidad  $\Gamma$  concentrada en el origen. Fuera del origen se ve como la ecuación de Laplace, pero en una región que no es simplemente conexa.

De acuerdo con la teoría general anterior sobre funciones conjugadas armónicas, también podemos definir un campo conjugado de velocidades. Pero como  $v = -\Gamma\theta$  es en este caso multivaluada, conviene considerar el campo vectorial  $\text{grad}(u) = -\frac{\Gamma}{r^2}(x, y)$ , aunque recordemos que en el caso general exento de singularidades es equivalente a considerar el campo Hamiltoniano correspondiente a  $v$ . Las soluciones correspondientes salen radialmente del origen; así este campo de velocidades corresponde a una fuente si  $\Gamma < 0$  y a un sumidero si  $\Gamma > 0$ , donde  $\Gamma$  es la intensidad correspondiente. De nuevo el flujo preserva área, pues una región dada que no contenga al origen se va contrayendo en la dirección radial y expandiendo en la dirección angular al seguir el flujo, digamos de una fuente.

Finalmente, mediante la identificación de  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , el campo de velocidades  $\text{Ham}(u)$  del vórtice se puede escribir en forma compleja como

$$\text{Ham}(u) = \frac{\Gamma}{|z|^2} iz = i\frac{\Gamma}{\bar{z}}, \quad (5)$$

donde  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  y  $\bar{z}$  denota el conjugado de  $z$ . De la misma forma, el campo de velocidades  $\text{grad}(u)$  de la fuente o sumidero se escribe en forma compleja como

$$\text{grad}(u) = -\frac{\Gamma}{|z|^2} z = -\frac{\Gamma}{z}. \quad (6)$$

Lo anterior es un caso particular de la siguiente construcción general: Si  $-\Gamma \ln z$  se reemplaza por una función holomorfa  $f(z) =$

$u(x, y) + iv(x, y)$ , o más generalmente con derivada meromorfa (i.e., holomorfa excepto por polos), entonces

$$\overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

es la representación compleja del campo gradiente de  $u$  (véase Kreyszig [9]), mientras que

$$-i \overline{f'(z)}$$

es la representación compleja del campo Hamiltoniano de  $u$ .

### 3. Ecuaciones diferenciales de un vórtice y de la interacción de vórtices

Usando (5), el sistema (4) de ecuaciones diferenciales para el vórtice puntual se escribe en forma compleja como

$$\dot{z} = i \frac{\Gamma}{\bar{z}}. \quad (7)$$

Como comparación, si usamos (6), el sistema gradiente correspondiente a la fuente puntual toma la forma  $\dot{z} = -\Gamma/\bar{z}$ . Por otro lado, las ecuaciones del campo de aceleraciones para el problema de Kepler o problema de fuerza central Newtoniano se escriben como

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{|z|^3} z, \quad (8)$$

donde  $\mu > 0$  es la constante de masas.

Es interesante hacer notar que si hacemos un reescalamiento complejo  $t = -i\tau$  del tiempo donde  $\tau \in \mathbb{R}$ , los factores respectivos  $i, -1$  de las ecuaciones (7) y (8) se absorben y obtenemos

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\Gamma}{\bar{z}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{\mu}{\bar{z}|z|^2},$$

respectivamente.

Si consideramos ahora la interacción de  $N$  vórtices puntuales en el plano complejo donde el vórtice  $k = 1, 2, \dots, N$  tiene vorticidad o intensidad  $\Gamma_k$  y posición  $z_k \in \mathbb{C}$  obtenemos como sus ecuaciones de movimiento el siguiente sistema de  $N$  ecuaciones complejas no lineales de primer orden

$$\dot{z}_k = i \sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^2} = i \sum_{l \neq k}^N \frac{\Gamma_l}{\bar{z}_k - \bar{z}_l}. \quad (9)$$

Esto significa que estamos ahora interesados en el movimiento de los vórtices mismos. Un vórtice dado está sujeto a un campo de velocidades que es la suma de las velocidades que producirían todos los vórtices restantes en el punto de  $\mathbb{C}$  donde se encuentra el vórtice en cuestión. Estas ecuaciones escritas en términos de las partes real e imaginaria de cada posición nos dan el siguiente sistema de  $2N$  ecuaciones reales de primer orden para  $k = 1, 2, \dots, N$

$$\dot{x}_k = - \sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \frac{y_k - y_l}{d_{kl}^2}, \quad \dot{y}_k = \sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \frac{x_k - x_l}{d_{kl}^2},$$

donde  $d_{kl} = |z_k - z_l|$ . (10)

Es importante señalar aquí que por ser un sistema de primer orden, toda solución está determinada de forma única especificando solamente la posición inicial de los vórtices.

Como comparación, las ecuaciones diferenciales para un sistema de  $N$  cuerpos en  $\mathbb{C}$  bajo sus atracciones gravitacionales mutuas se pueden escribir como

$$\ddot{z}_k = - \sum_{l \neq k}^N m_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^3},$$

donde  $m_k > 0$  es la masa del cuerpo situado en  $z_k$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Volvamos al sistema de  $N$  vórtices puntuales. En sus famosas conferencias sobre Física Matemática, Kirchhoff [8] demostró que las ecuaciones (10) pueden escribirse en forma canónica Hamiltoniana como

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \Gamma_k \dot{y}_k = - \frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad (11)$$

donde

$$H = - \sum_{k=1, l>k}^N \Gamma_k \Gamma_l \ln d_{kl} \quad (12)$$

es el Hamiltoniano del sistema.

El sistema es casi como un sistema Hamiltoniano clásico, excepto por los factores  $\Gamma_k$ . Pero si definimos las posiciones generalizadas como  $q_k = x_k$  y los momentos generalizados como  $p_k = \Gamma_k y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , obtenemos ya el sistema en la forma clásica

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (13)$$

donde se reemplaza  $d_{kl}^2 = (q_k - q_l)^2 + (p_k/\Gamma_k - p_l/\Gamma_l)^2$  en los términos de  $H$ . De la teoría de sistemas Hamiltonianos, la energía  $H$  es una cantidad conservada durante el movimiento de los vórtices. Para estudiar la evolución de los  $N$  vórtices podemos usar indistintamente el sistema (11) el (13), pero de ahora en adelante nos referiremos al (11).

El sistema tiene además otras 3 integrales primeras independientes: las dos componentes  $Q = \sum_{k=1}^N \Gamma_k x_k$ ,  $P = \sum_{k=1}^N \Gamma_k y_k$  del momento lineal, y el momento de inercia  $I = \sum_{k=1}^N \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2)$ . Estas integrales primeras corresponden a la invariancia de las ecuaciones diferenciales (9) bajo traslaciones o rotaciones de coordenadas. Por otro lado, el virial o momento angular  $V = \sum_{k=1}^N \Gamma_k z_k \times \dot{z}_k$  resulta de la invariancia del sistema bajo reescalamiento de las posiciones y del tiempo. Como el sistema es de primer orden, esta función se puede escribir a lo largo de las soluciones en términos de posiciones únicamente, pero lo que resulta sorprendente es que puede escribirse sólo en términos de las vorticidades, a saber  $V = \sum_{k=1, l>k}^N \Gamma_k \Gamma_l$ , por lo cual es un invariante al ser constante en todo el espacio fase. Este resulta importante para describir las soluciones de colisión para 3 vórtices o para paralelogramos de 4 vórtices o las de equilibrio para 3 vórtices como veremos en las próximas dos secciones.

Para estudiar la posible integrabilidad del sistema tenemos que introducir el concepto de corchete de Poisson que a cada pareja de funciones  $f, g$  derivables con valores reales definidas en el espacio fase, le asocia la nueva función

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial y_k} - \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right).$$

Este corchete es bilineal, antisimétrico y satisface la llamada integral de Jacobi. Se puede verificar directamente que

$$\{Q, H\} = \{P, H\} = 0, \quad \{I, H\} = 0.$$

Estas identidades son también consecuencia de que  $Q, P, I$  sean integrales primeras del sistema Hamiltoniano (11). Se verifica también

que  $\{Q^2 + P^2, I\} = 0$ , mientras que  $\{Q, I\} = 2P$ ,  $\{P, I\} = -2Q$  son en general no nulos. Como el corchete de Poisson entre cualquier par de las 3 integrales primeras independientes  $H, I, Q^2 + P^2$  es nulo, se dice que están siempre en involución, sin importar las intensidades de los vórtices. El Teorema de Liouville–Arnold en Mecánica Clásica asegura entonces la integrabilidad del problema de  $N \leq 3$  vórtices y cualesquiera valores de las vorticidades. De hecho, el problema de un solo vórtice que describimos en la sección anterior es trivial, pues tiene un sólo grado de libertad y es claro que el vórtice permanece estacionario. En el caso de 2 vórtices el Hamiltoniano (12) tiene un solo término:  $H = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2} \ln d_{12}$ , lo cual significa que la distancia  $d_{12}$  entre los vórtices es constante a lo largo de cualquier solución. Las posibles soluciones estaban ya esencialmente descritas en el artículo de Helmholtz [6]: son movimientos circulares uniformes alrededor de un centro común de rotación si  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$  o traslaciones paralelas con velocidad constante si  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ . Gröbli [2] fue el primero en describir con detalle cómo determinar las trayectorias en problemas de 3 vórtices.

Notemos que el campo de velocidades de una fuente (6) puede obtenerse a partir del campo (5) del vórtice, simplemente reemplazando el número complejo  $i$  por  $-1$ . Esta observación es muy relevante porque puede generalizarse para obtener un nuevo modelo: las ecuaciones diferenciales del campo de velocidades para la interacción de fuentes puntuales

$$\dot{z}_k = - \sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \frac{z_k - z_l}{|z_k - z_l|^2} = - \sum_{l \neq k}^N \frac{\Gamma_l}{z_k - \bar{z}_l}.$$

se obtienen simplemente al reemplazar  $i$  por  $-1$  en (9), o equivalentemente, al reemplazar el campo vectorial Hamiltoniano correspondiente a (12) por el campo vectorial gradiente para la misma función. Lo interesante es que, dualmente es posible expresar también este campo gradiente, ya no como un campo vectorial Hamiltoniano, sino como lo que se llama un campo localmente Hamiltoniano en un contexto más amplio. La razón de que esta representación no sea exactamente Hamiltoniana, es otra vez que la función logaritmo natural es multivaluada.

## 4. Soluciones de equilibrio relativo

Las soluciones más simples de describir para problemas de vórtices puntuales son las que corresponden a configuraciones de vórtices que puedan moverse sin cambiar de forma, es decir las soluciones de *equilibrio relativo* en el sentido de Poincaré, que fueron analizadas por vez primera en Thomson (Lord Kelvin) [13], y poco después él mismo estudió también algunos aspectos de la estabilidad de estos movimientos en [14]. En este caso el movimiento del sistema de vórtices consiste sencillamente de una rotación uniforme respecto del centro de vorticidad, de una traslación uniforme, o en casos especiales de  $N = 3$  vórtices de un equilibrio estacionario.

Los equilibrios relativos más simples son aquellos donde la configuración de  $N$  vórtices forma un polígono regular de  $N$  lados. Es bien conocido que si todas las vorticidades son iguales y colocamos los vórtices en tal configuración, la solución correspondiente es de equilibrio relativo en rotación uniforme, cuya frecuencia angular  $\omega$  es inversamente proporcional a la longitud de los lados del polígono. Esto es cierto, incluso si agregamos un vórtice adicional en el origen. La recíproca de este resultado, es decir, si la configuración es un polígono regular en rotación con respecto a un punto fijo entonces todas las vorticidades son iguales, es válida sólo si  $N \geq 4$ , como pudimos probar recientemente en un trabajo en colaboración con M. Celli y E. Pérez–Chavela [4]. Este resultado es el análogo de uno de Perko y

Walter en mecánica celeste. También calculamos los posibles equilibrios relativos para 2 polígonos regulares y con la misma vorticidad para los vértices de cada uno de ellos. En general se pueden encontrar muchos equilibrios relativos con o sin simetrías, aún en el caso de que consideremos todos los vórtices con la misma vorticidad, véase [1].

En el caso  $N = 2$  todas las soluciones son de equilibrio relativo como para el problema de  $N = 2$  cuerpos. Si  $N = 3$  las soluciones de equilibrio relativo en triángulos equiláteros pueden ocurrir para valores arbitrarios de las vorticidades  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ . Sin embargo, para  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \neq 0$  el triángulo rota con respecto al centro de vorticidad del sistema y si además se cumple  $\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 = 0$ , lo cual significa que el momento angular es nulo, entonces se tiene un triángulo estacionario. Por otro lado, si  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$ , el triángulo se traslada uniformemente.

## 5. Problemas de 3 y 4 vórtices

En esta sección vamos a discutir algunas propiedades para problemas de 3 y 4 vórtices y otras que son válidas en general para  $N$  vórtices.

El primer problema interesante es la posibilidad de colisión de vórtices. A diferencia del problema gravitacional de  $N$  cuerpos, las colisiones aquí ocurren sólo bajo ciertas condiciones. Observando la definición del Hamiltoniano (12), que es una constante de movimiento, vemos que si todas las vorticidades tienen el mismo signo no pueden ocurrir colisiones ni escapes al infinito, pues todos los coeficientes  $\Gamma_k \Gamma_l$  de los logaritmos son positivos. Así que las colisiones sólo ocurren cuando hay vorticidades positivas y negativas. Si consideramos colisión total (de todos los vórtices), otra condición necesaria para que esto ocurra es que la constante momento de inercia  $I$  sea nula, pues 0 debe ser el valor límite de  $I$  cuando nos acercamos a colisión. Se prueba que toda solución del problema de 3 vórtices donde ocurre colisión total tiene virial nulo, es decir,  $\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 = 0$  y debe ser auto-semejante, es decir, su movimiento es como un equilibrio relativo, donde en todo instante tenemos triángulos semejantes entre sí pero que se van contrayendo y rotando al mismo tiempo. Por otro lado, las colisiones binarias (que involucran 2 vórtices) no existen para problemas de 2 y 3 vórtices. Véase [7] y las referencias de allí a trabajos previos.

Los problemas de 4 vórtices son no integrables en general. Sin embargo, si el momento lineal y la vorticidad total  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  son nulos, el problema es integrable. Lo mismo es cierto para 4 vórtices en configuración de paralelogramos introducidos originalmente por Goryachev (véase [3]), donde para que se conserve este tipo de configuración las vorticidades de vértices opuestos deben ser iguales, digamos  $\Gamma_1 = \Gamma_3$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma_4$  y 2 vértices contiguos tienen vorticidades de signos contrarios:  $\Gamma_1 \Gamma_2 > 0$ ; además, toda colisión es auto-semejante y ocurre exactamente cuando el virial  $V = 4\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2$  se anula, como para 3 vórtices. Sin embargo, en general los problemas de 4 vórtices presentan movimientos caóticos, véase también [3]. Por otro lado, el problema de caracterizar las colisiones para problemas de  $N \geq 4$  vórtices está todavía abierto. Una conjetura para colisiones totales es que éstas son siempre auto-semejantes, lo cual sería como la extensión de un Teorema de Sundman en mecánica celeste.

## Bibliografía

1. H. Aref, Vortex dynamics: a classical mathematics playground, *J. Math. Physics* 48, 065401 (2007).
2. H. Aref, N. Rott y H. Thomman, Gröbli's solution of the three-vortex problem, *Annual Rev. Fluid Mech.* 24 (1992), 1–20.
3. A. V. Borisov, A. A. Kilin, y I. S. Mamaev, Transition to chaos in dynamics of four point vortices on a plane, *Doklady Physics* 51 (2006), 262–267.
4. M. Celli, E. A. Lacomba y E. Pérez-Chavela, Polygonal relative equilibria in the N-vortex problem, 2008 (se publicará).
5. R. J. Donnelly, *Experimental superfluidity*, Univ. Chicago Press, (1967).
6. H. Helmholtz, On the integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex motion (traductor P. G. Tait, el original en alemán se publicó en 1858), *Philos. Mag.* 33 (1867), 485–510.
7. A. Hernández-G y E. A. Lacomba, Collisions and regularization for the 3-vortex problem, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* (en internet desde octubre de 2005) 9 (2007), 75–86.
8. G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik* (Teubner, Leipzig, 1876).
9. Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Vol. II (3a edición), Limusa Wiley, 2005.
10. J. E. Marsden, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
11. P. K. Newton, *The N-Vortex Problem: Analytical Techniques*, Vol. 145, *Appl. Math. Sciences*, Springer Verlag, New York, 2001.
12. S. Pekarsky y J. E. Marsden, Point vortices on a spheres: Stability of relative equilibria, *J. Math. Physics* 39 (1998), 5894–5907.
13. Sir W. Thomson (Lord Kelvin), On vortex atoms, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 6 (1867), 94–105.
14. Sir W. Thomson (Lord Kelvin), Floating magnets (illustrating vortex systems), *Nature* (Londres) XVIII, (1878), 13–14.



## Sumario compendioso

de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y a todo género de tratantes. Con algunas reglas tocantes a la Aritmética.

Autor: Juan Díez Freyle

UNAM 2008

ISBN 970-32-4070-4

Con la publicación de este libro en edición facsimilar, la UNAM inicia un ambicioso proyecto de rescatar “obras y documentos científicos publicados en México desde el periodo virreinal<sup>1</sup>”. Estos materiales aparecerán en la Bibliotheca Mexicana Historiae Scientiarum. En este esfuerzo, impulsado y coordinado por la Dra. María de la Paz Ramos Lara, participan más de 10 dependencias universitarias, tanto de la Coordinación de Humanidades como de la Coordinación de la Investigación Científica.

La elección del texto que nos ocupa obedece más que a su temprana fecha de impresión (1556), a que al final de las tablas de cuentas que forman el cuerpo más amplio del impreso, Díez Freyle introduce la explicación aritmética, regla de tres, para calcular los intereses de “cualquier barra o tejo de plata u oro<sup>2</sup>” y otras fórmulas para el cálculo de conversiones de las monedas al uso en la época, pero lo que le da su carácter de “libro científico” es la parte dedicada a los números cuadrados y cubos y las “Notables cuestiones del arte mayor tocantes al álgebra<sup>3</sup>”.

La importancia de lo anterior está remarcada en el “Estudio histórico” elaborado por el astrónomo Marco Arturo Moreno Corral y el texto “Sumario Compendioso. Un estudio del contenido matemático” del, precisamente, matemático, J. César Guevara Bravo.

En el primero de ellos, queda claro que la presentación de “sistemas de ecuaciones lineales de segundo y tercer grado<sup>4</sup>” era, para esa época, algo muy novedoso. Esto obedece a que en la transición entre la Edad Media y el Renacimiento los mercaderes eran los expertos en sumar, restar, multiplicar y dividir y, por tanto, su conocimiento era más bien restringido a este gremio, lejos de los ámbitos académicos de ese periodo. Además son los tiempos en que, al igual que en otras áreas del conocimiento, se da inicio hacia las ciencias modernas que hoy conocemos. En el caso de las matemáticas se introduce la notación hindú-arábiga, pues la numeración romana, dificultaba el aprendizaje de las operaciones básicas ya mencionadas y dificultaba el desarrollo de las matemáticas como tales.

Así, correspondiendo a las necesidades comerciales, se desarrollan los libros de aritmética. Uno de los más famosos es el Liber Abaci (1202) de Leonardo de Pisa, mejor conocido por los matemáticos como Fibonacci; texto que sirvió de base a los libros de aritmética mercantil, que en el siglo XV se publicaron a solicitud de “comerciantes, banqueros, administradores públicos y otros gremios necesitados de realizar cálculos<sup>5</sup>”. Moreno Corral nos informa que la primer obra de este tipo aparecida en España, se debe a Francesc Sanct Climent, quien publicó en catalán la Suma de la art de arismética, en 1482. Así la obra de Freyle se enmarca en los textos que siguieron al de Sanct Climent y al ser el primero impreso en la Nueva España la importancia de su rescate resulta más que justificada.

Uno de los apartados del texto de Moreno Corral se dedica a dilucidar ¿quién era Juan Díez Freyle?. Lo cierto es que prácticamente nada se sabe del autor y de acuerdo con el comentario de Moreno Corral lejos se está de saber quién era. Sin embargo, el escrito de Díez Freyle da pistas: “por no ser largo callo haber visto la gran necesidad que hay en muchos de los que tratan en los reinos del Perú de la cuenta y el poco cuidado en los que la saben remediarla<sup>6</sup>”. Por lo anterior, es posible deducir que pasó viviendo un buen tiempo en el Perú y cuando la conquista ya había concluido (1536) y se había iniciado la explotación minera, pues la motivación que tuvo Díez Freyle para escribir el libro fue el comercio de metales preciosos. Debió, posteriormente, trasladarse a la Nueva España, único lugar del nuevo mundo que contaba con imprenta entonces-la legendaria Juan Pablos-, pues al Perú ésta no hizo su arribo sino hasta 1584. Creemos que es más bien en el Perú y en España donde hay que buscar el rastro de Díez Freyle; pues como éste mismo señala en lo relativo a la Nueva España: “...quisiera haber mirado antes de ahora en ello que no lo dejara de poner harto más copioso, pero como mi intento no había sido tal a causa de no haber tratado la tierra nunca lo procuré...<sup>7</sup>”

<sup>1</sup>Sumario compendioso de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y a todo género de tratantes. Con algunas reglas tocantes a la Aritmética, México, DF, UNAM, 2008, p. 9 (presentación de la Biblioteca).

<sup>2</sup>Ibid., p. 98.

<sup>3</sup>Subtítulo dado por Díez Freyle a la parte que hoy se considera es la que le da su valor científico, véase el folio CI de la edición facsimilar.

<sup>4</sup>Moreno Corral, Marco Arturo, “Estudio histórico”, en Sumario compendioso....., p. 15.

<sup>5</sup>Ibid., p. 17.

<sup>6</sup>“Versión al español moderno”, en Sumario compendioso...., p. 95.

<sup>7</sup>Ibid., p 98.

# Sumario compendioso

De las cuentas de plata y oro que en los  
reinos del Perú son necesarias a los mercaderes  
y a todo género de tratantes.

Con algunas reglas tocantes a la Aritmética

hecho por Juan Diez Freyle

❖ Edición facsimilar ❖



Sumario compendioso de las cuentas  
de plata y oro q̄ en los reynos del Perú son necesarias a  
los mercaderes: y todo genero de tratantes. Con algunas  
reglas tocantes a la Aritmética.

❖ Hecho por Juan Diez Freyle. ❖

Estudio histórico de Marco Arturo Moreno Corral  
Análisis matemático de César Guevara Bravo

El estudio de J. César Guevara Bravo es el que debe resultar más interesante para los matemáticos y los estudiosos de la historia de la ciencia, pues profundiza en las posibles fuentes y referencias que utilizó Díez Freyle para escribir lo relevante de su libro: la parte de aritmética y álgebra. El rastreo que hace sobre los textos que pudo haber estudiado Díez Freyle lo lleva a ubicar la Summa Arithmetica de Luca Pacioli de Borgo como el texto que subyace al Sumario. No está de más señalar que Luca Pacioli recupera lo avances hechos por Fibonacci.

La influencia de esta obra es tal que Guevara Bravo señala: “Incluso, algunos ejemplos que se usaron en el Sumario son idénticos a los de la Summa<sup>8</sup>”. Más adelante insiste: “Así el problema del Sumario puede considerarse como una traducción<sup>9</sup>”. Lo anterior deja abierta la puerta para que los especialistas determinen hasta que punto la parte relevante del texto de Díez Freyle es labor original o una traducción de otros textos al español. Traducción que no deja de tener su importancia, pues al pasarlo del latín al castizo daba la posibilidad a los pocos alfabetizados de la época a entrar al mundo del álgebra y sus problemas.

La labor de Guevara Bravo de poner en lenguaje moderno los problemas algebraicos desarrollados y/o traducidos por Díez Freyle seguramente será la más llamativa para los interesados en el desarrollo de las matemáticas en México.

Sólo quisiera añadir, a esta breve reseña, un comentario final: Creo que se debió haber trasladado al lenguaje moderno la primera parte del texto de Díez Freyle, la relativa a la aritmética, pues se trata tan sólo de 18 páginas y eso le hubiera añadido un atractivo para su difusión a nivel más amplio. Lo anterior, no demérita en absoluto el esfuerzo realizado por la UNAM para rescatar este texto histórico.

Por: **Lic. en Soc. Carlos Arturo Flores Villela**

Técnico Académico Titular “A”,

Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades.

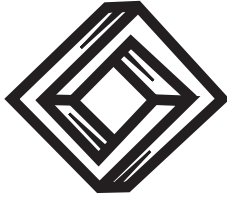
villela@servidor.unam.mx

---

<sup>8</sup>Guevara Bravo, J. C., “Sumario Compendioso. Un estudio del contenido matemático”, en Sumario compendioso..., p. 41.

<sup>9</sup>Ibid., p. 63.





**La Sociedad Matemática Mexicana**  
Se une a la pena que embarga a la comunidad científica por la  
irreparable pérdida de la

**Mtra. Julieta del Carmen Verdugo Díaz**

Acaecida el 23 de Junio de 2008.

# *La Sociedad Matemática Mexicana*



**Invita a la comunidad académica y profesional  
a formar parte de su nuevo Capítulo  
“Matemáticas Financieras, Economía  
Matemática y Administración de  
Riesgos” (MAFEMAR)**

**La membresía al Capítulo proporciona acceso a:**

- Cursos cortos
- Conferencias
- Difusión de Posgrados
- Talleres
- Bolsa de Trabajo
- Difusión de Libros

Solicita tu membresía, sin costo, al Capítulo MAFEMAR al correo electrónico:  
[mafemar.smm@gmail.com](mailto:mafemar.smm@gmail.com)

Asimismo, el capítulo MAFEMAR invita a la comunidad a participar en el Congreso Anual de la Sociedad Matemática Mexicana, del 20 al 24 de octubre de 2008, en el Tecnológico de Estudios Superiores de Valle de Bravo, en las siguientes modalidades:

- Conferencias Plenarias (60 min.)
- Conferencias de Divulgación (40 min.)
- Reportes de Investigación (20 min.)
- Reportes de Tesis Doctoral (20 min.)

Registro de trabajos en:

<http://www.smm.org.mx/valle2008>

hasta el 8 de agosto de 2008.

Informes, sugerencias y comentarios al coordinador nacional del Capítulo MAFEMAR y coordinador del área de la sección MAFEMAR del Congreso:

**Dr. Francisco Venegas Martínez** [mafemar.smm@gmail.com](mailto:mafemar.smm@gmail.com)

*Convocatoria*



# X SIMPOSIO DE Probabilidad y Procesos Estocásticos

1ra Reunión Conjunta Franco Mexicana de Probabilidad

3 al 7 de Noviembre 2008

El Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos tiene lugar cada dos años, se compone de dos cursos, así como de conferencias de investigación. Éste está orientado tanto a los estudiantes de maestría y doctorado como a los investigadores confirmados en probabilidad. La 1ra Reunión Franco Mexicana de Probabilidad brindará la ocasión a investigadores de ambas comunidades de exponer sus trabajos recientes.

Invitamos cordialmente a los participantes a presentar sus trabajos de investigación en la sesión de posters. Fecha límite para recepción de trabajos: 30 de agosto de 2008.

## Cursos

Zhan Shi: *Random walks and trees*

Monique Jeanblanc: *Credit Risk*

## Conferencistas invitados

### Expositores Franceses

Vlad Bally (Université de Marne-la-Vallée)

Laurent Denis (Université d'Évry)

Thomas Duquesne (Université Paris VI)

Nathalie Eisenbaum (Université Paris VI)

Nicole -El-Karoui (École Polytechnique)

Piotr Graczyk (Université d'Angers)

Yueyun Hu (Université Paris XIII)

Agnès Sulem (Inria-Rocquencourt)

Nizar Touzi (École Polytechnique)

Lioudmila Vostrikova (Université d'Angers)

### Expositores Mexicanos

Netzahualcōyotl Castañeda Leyva (Universidad Autónoma de Aguascalientes)

María Emilia Caballero (Instituto de Matemáticas, UNAM)

Begoña Fernández (Facultad de Ciencias, UNAM)

Luis Gorostiza (CINVESTAV)

Onésimo Hernández - Lerma (CINVESTAV)

Juan Carlos Pardo Millán (Universidad de Bath, Inglaterra)

José Alfredo López-Mimbela (CIMAT)

Victor Pérez-Abreu (CIMAT)

Leonel Pérez Hernández (Universidad de Guanajuato)

Erick Treviño Aguilar (CIMAT)

Gerónimo Uribe Bravo (Instituto de Matemáticas, UNAM)

## Para mayor información y registro

<http://www.cimat.mx/Eventos/XSPPE/>

## Comité Organizador

Daniel Hernández (CIMAT)

María Emilia Caballero (IMATE, UNAM)

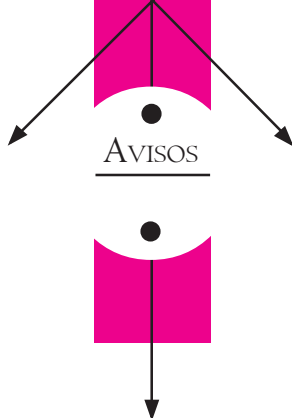
Loïc Chaumont (LAREMA, Université d'Angers)

Victor Rivero (CIMAT)

primer aviso

Diseño: Liliana Hernández





AVISOS



Sonya Kovalévskaya.

SMM-Fundación Kovalévskaja

### CONVOCATORIA 2008

**Objetivo:** Promover la participación de las mujeres en la investigación matemática en México.

#### I. Dirigido a:

- a) Mujeres mexicanas que realizan estudios de doctorado en cualquier campo de la matemática.
- b) Mujeres que realizan investigación en matemáticas, que están adscritas a una institución de educación superior o a una institución pública de investigación en México, y que obtuvieron el grado de doctor dentro de los cinco años previos a la fecha de emisión de esta convocatoria

**II. Características:** Otorgar un apoyo económico complementario para:

- a) La conclusión del proyecto doctoral y la obtención del grado.
- b) Llevar a cabo un proyecto de investigación.

Los apoyos serán individuales y no de grupo.

**Fecha límite:** 31 de agosto del 2008.

**Requisitos e informes:** <http://www.smm.org.mx>



## CARTA INFORMATIVA

### SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 57,  
Julio de 2008

Publicación de la  
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.  
Apartado Postal 70-450,  
04510 México, D.F.  
Tel. (55) 5747-3800 ext. 6414  
[smm@smm.org.mx](mailto:smm@smm.org.mx)

### JUNTA DIRECTIVA

Fernando Brambila Paz  
*Presidente*

Isidoro Gitler Goldwain  
*Vicepresidente*

Ernesto Lupercio Lara  
*Secretario General*

Miguel A. Xicoténcatl Merino  
*Secretario de Actas*

Francisco Ortíz Arango  
*Tesorero*

Hebert Kanarek Blando  
*Vocal*

Flor de María Aceff Sánchez  
*Vocal*

### COMITÉ EDITORIAL DE LA CARTA

Antonio Rivera Figueroa (Coordinador)

Fernando Galaz Fontes

Gabriel Villa Salvador

Ernesto Lupercio Lara

Víctor Hugo Ibarra Mercado

### COLABORADORES

Rosa María García Méndez

### DISEÑO

Daniel Espinosa Pérez

### IMPRESIÓN

S y G editores, SA de CV  
Téls. 5619-5293 / 5617-5610  
[sygeditores@cablevision.net.mx](mailto:sygeditores@cablevision.net.mx)

### PORTADA

Valle de Bravo, Estado de México