Discurso en la Ceremonia de Inauguración del XLI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 20 de Octubre de 2008

MATEMÁTICAS

Elias Micha
Departamento de Matemáticas
CINVESTAV
emicha@math.cinvestav.mx

Lic. María Guadalupe Monter Flores;
Secretaria de Educación del Estado de México y representante personal del Lic. Enrique Peña Nieto, Gobernador constitucional del Estado de México.

Act. Ernesto Monroy Yurrieta;
Subsecretario de Educación Básica y Normal

Es para mí un honor y una satisfacción poder dirigir este mensaje en la Ceremonia de Inauguración del XLI Congreso Nacional de Matemáticas, porque como Director del Consejo Mexiquense de Ciencia y Tecnología participo en un evento que abre sus puertas a destacados miembros de la comunidad matemática nacional y a algunos de diferentes países.

Saludo a investigadores, profesores de los niveles básico, medio superior y superior y estudiantes de matemáticas, quienes en estos días compartirán sus experiencias, resultados de investigación, propuestas e inquietudes, en torno a un tema que por sí mismo es apasionante. Un tema que además tiene una enorme trascendencia para el futuro de nuestras naciones ya que, como objeto de estudio, como herramienta para discernir y como reto para la enseñanza, las matemáticas constituyen un elemento estratégico para participar en la sociedad del conocimiento.

También este Congreso tiene un significado especial para mí, porque las matemáticas han sido y siguen siendo una parte importante de mi vida y a ellas he dedicado muchos años de trabajo en el campo de la topología. También, porque dentro de este congreso Nacional se celebra el Congreso Internacional de Topología Algebraica en honor del 75 aniversario de mi entrañable amigo, profesor y colega Samuel Gitler, uno de los matemáticos más importantes en la historia de este país. Así que en esta Ceremonia tengo una especial emoción e interés. ¡Muchas felicidades Sam!

Hoy se inicia una actividad que apoya una de las prioridades estatales, la cual se refiere a la importancia de avanzar significativamente en el tema de las matemáticas. Sin duda alguna, este congreso nos brindará la posibilidad de aprender de las experiencias de otros países y de otras entidades de nuestro país, para impulsar la enorme tarea que tenemos en el Estado ya que nuestro sistema educativo, en sus distintos niveles, atiende a una población escolar de poco más de 4 millones de estudiantes.

En el Estado de México, se ha establecido con toda claridad que las matemáticas son una prioridad. Y esto es un reto que está presente en los diversos espacios institucionales y en la sociedad civil y es un tema que requiere de un enorme esfuerzo ya que la Entidad cuenta con 15 millones de habitantes y con la población escolar en términos absolutos, más grande del país.

Sin duda alguna en estos días habrá la posibilidad de enriquecer la mirada acerca del avance que ha habido en cuanto a investigación, métodos de enseñanza, experiencias exitosas y políticas educativas. Seguramente un punto sobre el que habrá que reflexionar es si en educación matemática estamos haciendo bien las cosas para lograr que los estudiantes apliquen los conocimientos aprendidos y si esto nos permite ofrecer un mejor futuro a los jóvenes.

Sabemos que este tema es fundamental para insertar a nuestro país en la comunidad global donde las matemáticas, desde siempre, pero hoy más que nunca, son parte y condición indispensable del desarrollo integral del ser humano, son esenciales para entender el mundo en el que estamos inmersos y una herramienta para participar de las transformaciones que día a día se realizan en todos los ámbitos del conocimiento y de la vida en general. Si como país queremos alcanzar una posición competitiva de nuestra economía, debemos contar con el capital humano en condiciones de impulsar la sociedad del conocimiento.

Para ello tenemos mucho camino por recorrer y la investigación y enseñanza de las ciencias en general y de las matemáticas en particular son un aspecto que debemos tener presente; por ello la trascendencia de este Congreso que hoy nos reúne.

Para llegar a esta fiesta de las matemáticas se ha realizado un arduo trabajo de colaboración en el que ha participado con entusiasmo todo el sector educativo. Gracias a la C. Secretaria de Educación, Lic. Guadalupe Monter Flores por su apoyo y al señor Subsecretario Ernesto Monroy y a sus equipos de trabajo. Agradezco a todos los miembros de la Sociedad Matemática Mexicana y en particular a su mesa directiva por realizar este importante evento en este maravilloso Valle de Bravo. Ellos han hecho un gran esfuerzo por ofrecer a todos los participantes un conjunto variado de actividades que muestran la gran importancia de las matemáticas en la sociedad.

Para llevar a cabo el congreso ha habido una muy decidida participación y apoyo de la comunidad educativa del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Valle de Bravo. En particular quiero destacar la incansable labor de impulso y organización realizada por su director Guillermo González.

Como director general del COMECYT me congratulo de haber asumido la responsabilidad de apoyar de manera decidida, la realización dentro del Congreso, del evento internacional en honor al Dr. Samuel Gitler en el que habrán de participar algunos de los mejores topólogos del mundo.

Celebramos las posibilidades que nos abre al futuro la generación del conocimiento matemático y confío en que en estos días algunos jóvenes se interesen por formar parte de la nueva generación de investigadores y profesores de matemáticas.

Cada día el mundo avanza a grandes pasos en el conocimiento científico, cada día la tecnología nos muestra nuevas formas de producir, nos da nuevos productos. Y también cada día enfrentamos nuevos retos, y recordamos que tenemos otros aún no resueltos. Y sabemos la importancia de las matemáticas para encontrar respuestas.

Por ello en el COMECYT nos sumamos al esfuerzo de buscar para los jóvenes del Estado de México una formación integral en el más amplio sentido; y desde nuestro ámbito de competencia, por apoyar una sólida formación en las disciplinas científicas. No nos cansamos de insistir en que nuestro país tiene que avanzar mucho en este aspecto. No hay país en el mundo que desee una mejor vida para su población que no lo esté haciendo.

El Estado de México es una Entidad que está interesada en promover la inteligencia, el conocimiento y el desarrollo científico tecnológico necesarios para el progreso de la sociedad. Por eso en el Consejo Mexiquense de Ciencia y Tecnología nos da gusto tenerlos hoy aquí y nos sentimos orgullosos de participar en la XLI edición del Congreso Nacional de Matemáticas y nos entusiasma saber que en esta semana muchos jóvenes Mexiquenses se asomarán al mundo fascinante de la matemática.

Deseamos que la pasen bien.

Enhorabuena a todos

Muchas gracias

Euler y las Compuertas Lógicas Cuánticas

Oswaldo González-Gaxiola
Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas
UAM-Cuajimalpa

Introducción

El 15 de abril de 1707 nace en Basilea, Suiza el gran matemático Leonhard Euler; ahora a prácticamente 300 años del célebre suceso sus desarrollos matemáticos y sus aplicaciones siguen estando vigentes y en el presente artículo se verá como, quizá la más conocida de sus fórmulas tiene aplicaciones en la teoría cuántica de la información (área del conocimiento relativamente nueva, también denominada computación cuántica) como uno de los ingredientes matemáticos esenciales para el manejo de la información.

En este trabajo se presentará una generalización matricial al caso de matrices de orden 2×2 de la identidad de Euler para la representación exponencial de un número complejo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

y de manera breve su relación con la computación cuántica. Para lograrlo se definirá la matriz unidad imaginaria que generalizará la unidad imaginaria compleja y se obtendrá una representación exponencial de la primera matriz de Pauli σ_x usada tanto en la mecánica cuántica como en la computación cuántica, además se discutirá de manera muy breve una aplicación a la acústica, véase [1]. Para nuestro desarrollo se usará el concepto de matriz exponencial de manera fundamental.

Breve Introducción a la Teoría Cuántica de la Información

En la teoría cuántica de la información [8], la unidad básica de información es el *qubit* o *bit cuántico*. Un *qubit* puede estar en dos estados puros distintos que se denotan $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente. Físicamente esto se representa por un sistema cuántico de dos estados; el sistema cuántico de dos estados más conocido, es sin duda, el spin de un electrón; en dicho sistema podemos representar el spin $-1/2$ por el estado $|0\rangle$ y al spin $1/2$ por el estado $|1\rangle$. Un *qubit* puede además estar en estados intermedios (ésta es una diferencia con los modelos clásicos), pues por ejemplo, el spin de un electrón puede tener el estado (spin no definido)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle.$$

Un *qubit* es un vector de un espacio vectorial complejo generado por los dos estados puros. Según la mecánica cuántica, dicho espacio será un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ en el que $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es una base ortonormal y los estados son vectores unitarios; entonces, un *qubit* puede estar en cualquier estado, véase la figura 1 en la que se ilustra la esfera de Bloch de todos los posibles estados (ignorando las fases) de un *qubit*

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

tal que las amplitudes a y b son elementos de $\mathbb{C}$ y $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

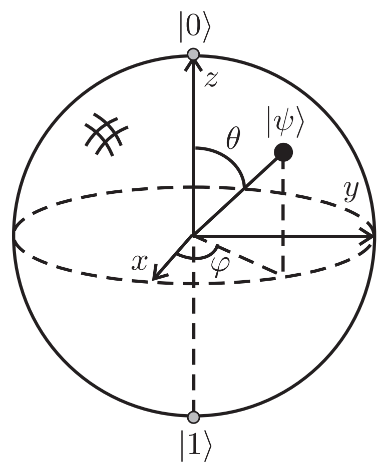


Figura 1: Esfera de Bloch.

En la notación de Dirac los elementos de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ son llamados *ket* y son denotados por $|u\rangle$, los elementos del espacio dual $\mathcal{H}^*$ son llamados *bra* y se denotan por $\langle u|$.

El *bra* $\langle u|$ evaluado en el *ket* $|v\rangle$ es el *bracket* $\langle u|v\rangle$, el cual resulta ser el producto escalar entre u y v como elementos de $\mathcal{H}$ (en este caso $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$). El operador $|u\rangle\langle v|$ coincide en $\mathcal{H}$ con el operador definido como

$$|u\rangle\langle v|(|w\rangle) = \langle u|w\rangle|u\rangle$$

y es un operador de rango 1 si u y v son distintos de cero; la traza y el adjunto del proyector $|u\rangle\langle v|$ estan dados por

$$Tr|u\rangle\langle v| = \langle v|u\rangle$$
$$(|u\rangle\langle v|)^* = |v\rangle\langle u|,$$

además se tiene

$$|u_1\rangle\langle v_1||u_2\rangle\langle v_2|\cdots|u_n\rangle\langle v_n| \\ = (\langle v_1|u_2\rangle\langle v_2|u_3\rangle\cdots\langle v_{n-1}|u_n\rangle)|u_1\rangle\langle v_n|. \quad (2)$$

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$, con el producto escalar

$$\langle\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\rangle = \bar{a}c+\bar{b}d,$$

se le llama el espacio de *1-qubit* si consideramos, $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle$. Así, $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ forma una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert con los productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, respectivamente. Se construye el producto tensorial de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ como el producto tensorial de espacios vectoriales, véase [6]. Además podemos convertir a este producto tensorial de espacios vectoriales en uno con producto escalar definiendo; $\forall\phi_1,\psi_1\in\mathcal{H}_1$ y $\phi_2,\psi_2\in\mathcal{H}_2$,

$$\langle\phi_1\otimes\phi_2,\psi_1\otimes\psi_2\rangle = \langle\phi_1,\psi_1\rangle_1\,\langle\phi_2,\psi_2\rangle_2$$

y extendiendo por linealidad; finalmente, tomemos la completación de este producto interno. El resultado es el producto tensorial $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ como un nuevo espacio de Hilbert.

El espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{\otimes^n}=(\mathbb{C}^2)^{\otimes^n}$ (producto tensorial de $\mathcal{H}$ con el mismo n-veces), se le llama el espacio de *n-qubit*; si $x_1x_2\cdots x_n$ es una *palabra* de longitud n del alfabeto $\{0,1\}$, tenemos

$$|x_1x_2\cdots x_n\rangle = |x_1\rangle|x_2\rangle\cdots|x_n\rangle \\ = |x_1\rangle\otimes|x_2\rangle\otimes\cdots\otimes|x_n\rangle = |\mathbf{x}\rangle, \quad (3)$$

donde $\mathbf{x} = x_1 2^{n-1} + x_2 2^{n-2} + \cdots x_{n-1}2 + x_n$ (el entero $\mathbf{x}$ está variando en el conjunto $\{0,1,\ldots,2^n-1\}$, pues $x_1x_2\cdots x_n$ varía sobre todas las palabras de longitud n).

En la computación clásica, la información pasa a través de canales clásicos y dichos canales son operados por *compuertas lógicas* (por ejemplo AND, OR, NOT) algunas de estas compuertas lógicas se muestran en la figura 2.

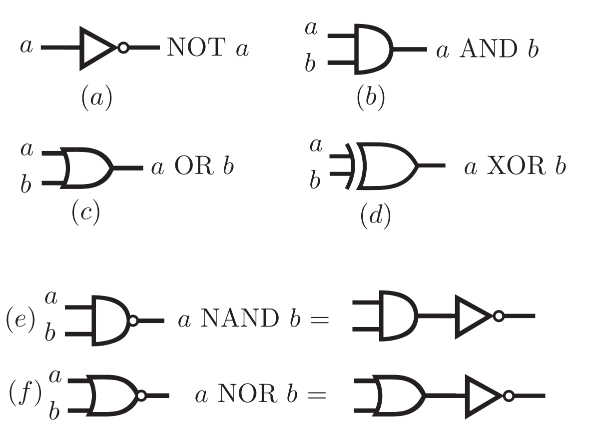


Figura 2: Algunas compuertas lógicas clásicas.

De manera similar, en la teoría cuántica de la información la información pasa a través de canales cuánticos que son operados por *compuertas lógicas cuánticas*. Una *compuerta lógica cuántica* es un operador unitario U[1] en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (con $dim\mathcal{H}<\infty$) y a diferencia con la computación clásica, todas las compuertas lógicas cuánticas son reversibles, en el sentido de poder saber qué par de datos fue el que arrojó un cierto resultado (por ejemplo si $a\,AND\,b=0$, existen tres pares ordenados (a,b) factibles a dar ese resultado).

Si la entrada es $|u\rangle$ y pasará por la compuerta U, entonces la salida es $U|u\rangle$ como se ilustra en la figura 3.

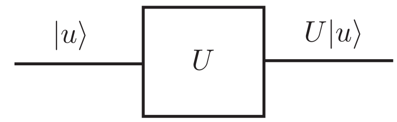


Figura 3: La compuerta lógica cuántica U actúa sobre 1-*qubit*.

Cualquier operador unitario U que actúa sobre *1-qubits* puede escribirse como

$$U = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

donde $|a|^2+|b|^2=1$.

Por ejemplo,

$$U|0\rangle = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\alpha}\{a|0\rangle - \bar{b}|1\rangle\},$$

y similarmente, $U|1\rangle = e^{i\alpha}\{b|0\rangle + \bar{a}|1\rangle\}$.

En computación clásica, sólo hay una compuerta lógica de interés desde el punto de vista de la reversibilidad sobre los *1-bits*: la compuerta NOT; de manera contraria en el mundo cuántico, tenemos varias compuertas lógicas sobre los *1-qubits* interesantes; es decir, reversibles y algunas de ellas son descritas a continuación.

Compuertas de Pauli

Estas son tres compuertas lógicas se denotan por σ_x, σ_y, σ_z. Las matrices unitarias en la base computacional son

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la matriz unitaria σ_x es la compuerta NOT sobre los 1-*qubits*, pues $\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$ y $\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$; como podemos ver, estas compuertas están dadas por las matrices de Pauli $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ de la mecánica cuántica; ellas son Hermitianas $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1$ y anticonmutativas entre ellas.

Compuerta de Hadamard

Esta compuerta lógica corresponde a la matriz unitaria

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que actúa sobre *1-qubits* por:

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad H|1\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}};$$

[1] es decir, un operador U para el cual, $U^*U=I$, donde U^* es el adjunto de U en $\mathcal{H}$.

además, el producto tensorial $H^{\otimes^n}$ es la *compuerta de Hadamard* que actúa sobre los *n-qubits* $|\mathbf{x}\rangle$ (palabras de longitud n), es decir, sobre $\mathcal{H}^{\otimes^n} = \mathbb{C}^{\otimes^{2n}}$ por

$$H^{\otimes^n}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{y\in\{0,1\}^n} (-1)^{x\cdot y}|y\rangle$$

donde $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ es el producto interno módulo 2.

Compuertas de Rotación

Aquí describiremos las compuertas lógicas llamadas *compuertas básicas de rotación* $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ son operadores que al actuar sobre *1-qubits* le inducen la rotación en el sentido usual de θ grados alrededor de los ejes x, y y z respectivamente, éstas estan dadas por las matrices unitarias

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_x, \quad (4)$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_y, \quad (5)$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}\sigma_z. \quad (6)$$

De manera más general

$$R_{\widehat{n}}(\theta) = (\cos\frac{\theta}{2})I - (i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2})(\widehat{n}_x\sigma_x + \widehat{n}_y\sigma_y + \widehat{n}_z\sigma_z),$$

es el operador que corresponde a una rotación por un ángulo de θ grados alrededor de un eje cuyo cosenos directores son $(\widehat{n}_x, \widehat{n}_y, \widehat{n}_z)$. Como hemos visto al introducir estas últimas compuertas lógicas correspondientes a la teoría matemática de la computación cuántica aparece de manera matricial la identidad de Euler (1) mencionada en el resumen del presente trabajo; ahora enunciamos el siguiente teorema que K. R. Parthasarathy ha llamado Teorema de Euler en [5].

Teorema 1. *Cada matriz unitaria U de orden 2x2 puede expresarse como*

$$U = e^{i\alpha}\begin{pmatrix} e^{-i(\frac{\beta+\delta}{2})}\cos\frac{\gamma}{2} & -e^{-i(\frac{\beta-\delta}{2})}\,\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} \\ e^{i(\frac{\beta-\delta}{2})}\,\mathrm{sen}\,\frac{\gamma}{2} & e^{i(\frac{\beta+\delta}{2})}\cos\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta). \quad (7)$$

En el teorema anterior resalta la importancia y la vigencia de la identidad de Euler en la teoría cuántica de la información, el resultado nos dice que cualquier compuerta lógica sobre los 1-*qubits* queda expresada como composición de las compuertas de rotación y éstas a son a su vez la aplicación de la identidad de Euler en su versión matricial

La Identidad de Euler y Algunas Aplicaciones

Si A es una matriz cuadrada real o compleja, la matriz exponencial se define como puede verse en [3] por

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}.$$

Consideremos ahora a las matrices complejas

$$T = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\alpha^2 b & a \end{pmatrix},$$

donde α, a y b son números reales, $\alpha \neq 0$. Notemos que $det(T) = a^2 + \alpha^2 b^2$, así T es invertible, si a y b no son cero.
Matrices del tipo de T son muy importantes como matrices de transferencia en modelación acústica, para la transmisión acústica a través de estructuras.
En transmisión acústica, $\alpha = \frac{S}{c}$, donde S es la sección del tubo o ducto por el cual viajan las ondas sonoras en cierto fluido y c es la velocidad del sonido en el fluido contenido en el tubo; si consideramos, además a las matrices del tipo

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i\alpha^2 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces, si I es la matriz identidad de orden 2×2, tenemos

$$T = aI + b\Phi.$$

Observemos la analogía con la notación usual para un número complejo, además con un cálculo simple, podemos obtener

$$\Phi^2 = -\alpha^2 I,$$

entonces, tenemos que Φ funge como *matriz unidad imaginaria,* pues notemos que si $\alpha = 1$, tenemos que $\Phi^2 = -I$, luego

$$\Phi = i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

donde σ_x es la primera matriz de Pauli.
Así

$$T = aI + ib\sigma_x.$$

Sabemos que para cualquier número real θ, si usamos la expansión en serie de la función de variable compleja e^z y de las funciones reales $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ obtenemos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Proposición 1. *Sea $\Psi = -i\Phi$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos*

$$\Psi^n = \alpha^{n-r(n)}\Psi^{r(n)}, \qquad \textit{donde} \quad r(n) = \textit{residuo de } n \textit{ módulo } 2.$$

Demostración. *Por inducción sobre n:*
(i) para $n = 2$, calculando

$$\Psi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha^2 I = \alpha^2\Psi^0,$$

y así, la tesis se tiene.

(ii) Supongamos que la tesis se tiene para algún natural n genérico, luego tenemos

$$\Psi^{n+1} = \Psi^n\Psi = \alpha^{n-r(n)}\Psi^{r(n)}\Psi.$$

$*$ *Si $r(n+1) = 1$ entonces el residuo de $r(n) = 0$, por lo tanto*

$$\Psi^{n+1} = \alpha^n\Psi = \alpha^{n+1-r(n)}\Psi^{r(n)},$$

y la tesis se tiene.

$**$ *Si $r(n+1) = 0$ entonces $r(n) = 1$ y de igual manera que en el caso anterior, la tesis se tiene.* ■

Teorema 2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$ se tiene*

$$e^{it\sigma_x} = \cos(\alpha t)I + \frac{i}{\alpha}\,\mathrm{sen}(\alpha t)\sigma_x \tag{8}$$

Demostración. *Si $t \neq 0$, por la definición de matriz exponencial y considerando la proposición anterior ($\sigma_x^n = \alpha^{n-r}\sigma_x^r$)*

$$e^{it\sigma_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\sigma_x)^n}{n!} = \sum_{n\,pares}^{\infty} \frac{i^n t^n \sigma_x^n}{n!} + \sum_{n\,impares}^{\infty} \frac{i^n t^n \sigma_x^n}{n!}$$

$$= (\sum_{n\,pares}^{\infty} \frac{i^n (\alpha t)^n}{n!})I + \frac{1}{\alpha}(\sum_{n\,impares}^{\infty} \frac{i^n (\alpha t)^n}{n!})\sigma_x$$

$$= \cos(\alpha t)I + \frac{i}{\alpha}\,\mathrm{sen}(\alpha t)\sigma_x.$$

■

Conclusiones

Si consideramos la igualdad $i\sigma_x = \Phi$ en la igualdad (2) obtenemos

$$e^{it\sigma_x} = e^{t\Phi} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & \frac{i}{\alpha}\,\mathrm{sen}(\alpha t) \\ i\alpha\,\mathrm{sen}(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix},$$

calculando el determinante de esta matriz $det(e^{t\Phi}) = 1$ y si $\alpha = -1$,

$$e^{t\Phi} = \begin{pmatrix} \cos(t) & i\,\mathrm{sen}(t) \\ i\,\mathrm{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = R_x(-2t).$$

Si $\alpha = 1$ y $t = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$e^{2m\pi\Phi} = I.$$

Si $\alpha = 1$ y $t = \frac{m\pi}{2}$, con $m = 1 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$e^{\frac{m\pi}{2}\Phi} = \Phi,$$

lo cual es una representación de la *matriz unidad imaginaria* Φ (recordemos que $e^{\frac{m\pi}{2}i} = i$).
Además, si previamente multiplicamos por $-i$ en ambos lados, tenemos una reprentación exponencial de la primera matriz de Pauli

$$\sigma_x = -ie^{\frac{m\pi}{2}\Phi}.$$

Aquí hemos probado la identidad de Euler (1) en una pequeña generalización al caso matricial, pero lo más importante es resaltar la vigencia de un trabajo matemático y su aplicación a algo tan vanguardista como es la teoría cuántica de la información.

Bibliografía

1. A. Dorian, *A simple method for the analysis of deep cavity and long neck acoustic resonators*, Journal of Sound and Vibration, 232, 823-833, (2000).
2. A. O. Pittenger, *Introduction to Quantum Computing Algorithms*, Birkhauser, (1999).
3. B. Noble, J.W. Daniel, *Álgebra Lineal Aplicada*, tercera edición; Prentice-Hall, México (1998).
4. C. Williams, C. Clearwater, *Explorations in Quantum Computing*, Springer-Verlag (1997).
5. K. R. Parthasarathy, *Quantum Computation, Quantum Error Correcting Codes and Information Theory*, Narosa Publishing House, (2006).
6. M. Nakahara, T. Ohmi, *Quantum Computing From Linear Algebra to Physical Realizations*, Taylor and Francis Group, (2008).
7. M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University. Press. (2000).
8. S. Gudder, *Quantum Computation*, Amer. Math. Monthly, 110, 181-201, (2003).

A Manera de Semblanza: Peter Seibert Kopp en México

Antonio Rivera Figueroa
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
arivera@cinvestav.mx

Estimado Dr. Peter Seibert, amable auditorio:

Es para mí un honor participar en este emotivo homenaje que se le está rindiendo a usted Dr. Peter Seibert, al cual me adhiero con enorme gusto. Agradezco a los organizadores de este festejo y particularmente a la doctora Martha Álvarez Aguirre y a los doctores Luis Aguirre Castillo y Julio Ernesto Solís Daun, organizadores del mismo, por su atenta invitación para expresar a manera de semblanza algunas palabras acerca de su estancia en México. Aprovecho esta magnífica oportunidad para manifestarle mi reconocimiento y mi más sincero agradecimiento no sólo por sus enseñanzas sino por los diversos y gratos momentos que compartí con usted.

Recuerdo que tuve conocimiento de su persona en 1966, año en el que ingresaba a estudiar en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) del Instituto Politécnico Nacional. En ese mismo año usted se incorporaba a la planta de profesores de esa Escuela, en donde impartiría los cursos de Análisis Matemático Real, teoría de Funciones de Variable Compleja, teoría de Ecuaciones Diferenciales y Sistemas Dinámicos. Cabe mencionar que su estancia en la ESFM era la segunda que realizaba en nuestro país, al cual retornaba después de permanecer durante los años 1964-1965 en la Universidades de Yale y de Brown en los Estados Unidos de Norteamérica. La primera de sus estancias en nuestro país la llevó a cabo en el Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional durante los años 1963-1964. La tercera es la que actualmente realiza en este Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, en su unidad de Iztapalapa, al cual se incorporó en el año 1987.

Voy a referirme particularmente a su paso por la ESFM, de 1966 a 1971, de esta época sólo me referiré a algunas de sus actividades académicas, pues principalmente hablaré de su gran calidad humana, de la cual soy un afortunado testigo. Los distinguidos ponentes que participan en este homenaje ya hablarán de su contribución matemática.

Tenga la seguridad Dr. Peter Seibert, de que todos los que hemos sido sus estudiantes, nos sentimos orgullosos de que usted haya sido nuestro profesor. Mis compañeros y yo sabíamos de su notable trayectoria académica, estábamos enterados de que se había doctorado con honores a la edad de 23 años en la Universidad de Munich y en cuyo examen de grado obtuvo la calificación magna cum laude.

Sobra decir que los estudiantes siempre lo respetamos como persona y como profesor, con frecuencia presumíamos de ser sus alumnos. Le platicaré acerca de una pequeña broma que jugábamos a nuestros compañeros que no le conocían, una broma que solíamos hacer a expensas suya, pues con el respeto que me merece le comento que usted no se salvó de las travesuras de sus estudiantes, tómelo como una manifestación del aprecio que le teníamos. Pues bien, cuando alguno de nuestros compañeros, que no lo conocía y que nos pedía referencias de los profesores de los cursos a los que habría de inscribirse, respondíamos acerca de usted: “el Dr. Seibert es un gran matemático, es un magnífico profesor, es de primera fila”, a lo que nuestro interlocutor pronto corregía: “no se dice de primera fila, se dice de primera línea”. Pero, nosotros replicábamos, “no. . . no, es de primera fila, pues solamente los de adelante le escuchan”. Siempre le distinguió su voz baja y pausada, la cual emanaba tranquilidad y demandaba atención a sus interesantes explicaciones.

Mi relación con usted no fue solamente de profesor-alumno en la ESFM, pues también tuve la fortuna de participar en actividades académicas dirigidas por usted en el Instituto Mexicano del Petróleo (IMP). Además de que coincidimos en nuestro ingreso a la ESFM en 1966, usted como profesor y yo como alumno, también hubo para mi otra afortunada coincidencia: en 1968, ambos ingresábamos a ese Instituto. Estábamos adscritos al Departamento de Matemáticas de la Rama de Investigación Científica Aplicada (ICA) dirigida por el Dr. Leopoldo García-Colín. La jefatura del Departamento estaba a cargo del Dr. Francisco Oliva. En ese entonces yo cursaba el tercer año de la licenciatura en la ESFM. Con escasos conocimientos de matemáticas particularmente en Topología y Ecuaciones Diferenciales, yo participaba en un Seminario sobre Sistemas Dinámicos conducido por usted y que se llevaba a cabo en el IMP un día a la semana.

En ese seminario había un grupo muy nutrido de participantes y yo tenía la encomienda de tomar notas y de revisar las transcripciones que de su manuscrito y mis notas hacía la Srita. Martha Pohls, para lo cual usaba las entonces novedosas máquinas de escribir IBM con esferitas de símbolos matemáticos. El seminario no tenía un nombre oficial, pero le llamábamos con afecto el “Seminario de Seibert”.

Recuerdo que entre los participantes del seminario se encontraban Francisco Oliva (jefe del Departamento), María Eugenia Cortés Islas, Jesús Pérez Romero, Ernesto Lacomba Zamora, Diego Bricio Hernández Castaños, Pablo Barrera Sánchez, Alejandro Palma Almendra (el físico Palma) y Mario Sánchez. También estaban adscritos al Departamento Alejandro López Yañez, Saúl Hahn Goldberg, Faustino Limón, Rosa María Chargoy y Eduardo Terán. Todos ellos jóvenes recién egresados de la Escuela Superior de Física y

Matemáticas del IPN o de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Le confieso que yo padecía ese seminario, me angustiaba no poder seguirle el paso. Estaba conciente de la carencia de mis conocimientos, pero para mi era un privilegio ser uno de los participantes. Sin embargo, un día al salir de una de las sesiones me sentí un tanto reconfortado, pues recuerdo que Jesús Pérez Romero me manifestó con cara de preocupación su gran angustia por entender casi nada de lo que usted nos había expuesto, no solamente lo de ese día sino que me comentaba que eso le ocurría casi siempre. Respondí a Jesús: "no sabes lo alentadoras que han resultado para mi tus palabras, yo pensé que era el único del grupo en sentir esa angustia". Por cierto, hace unos días charlé con Jesús y me encomendó le hiciera llegar de su parte un afectuoso saludo.

El "Seminario de Seibert" era la principal actividad académica del Departamento de Matemáticas del IMP, aglutinaba a casi todos los miembros de ese Departamento y generaba no solamente un agradable ambiente de trabajo sino también de convivencia entre compañeros. Recuerdo con agrado el carácter alegre de María Eugenia Cortés, quien al referirse a todos nosotros nos decía "niños". Por ejemplo, "el niño Lacomba" o el "niño Diego". Ella misma se hacía llamar la "niña María". El día del Seminario, acostumbraba avisarnos de su llegada, pues en susurro nos decía: "ya llegó el niño Seibert". No es necesario decir que María siempre fue muy respetuosa, sus expresiones simplemente eran un reflejo de esa calidez que nos unía a todos. Recuerdo bien que usted, Dr. Seibert, solía llegar al Seminario con una bolsa de ricos chocolates, quizá sabía de lo amargo que resultaba el Seminario de Seibert para algunos de nosotros.

Si bien sufrí ese Seminario en el IMP, fue en ese espacio académico donde realicé mi tesis de licenciatura, de la cual me siento muy orgulloso. El tema fue Ecuaciones Funcional-diferenciales como Semi-sistemas dinámicos. Teoría de Estabilidad. El trabajo consistió en generalizar varios de los resultados conocidos en teoría de estabilidad para ecuaciones diferenciales ordinarias al caso de las ecuaciones funcional-diferenciales, que son ecuaciones del tipo , donde es un funcional definido en el espacio de las funciones continuas y es el pedazo de la solución correspondiente al intervalo , trasladado al intervalo .

Las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones con retardo resultan un caso particular de las ecuaciones funcional-diferenciales. Las principales dificultades que se presentaban para las generalizaciones de los teoremas, de las ordinarias a las funcionales, residían en que el espacio de las funciones continuas en el intervalo cerrado no es localmente compacto, mientras que el espacio tiene esta propiedad. Una manera de salvar ese problema fue mediante el llamado Lema Generalizado de Hale. Con este lema se demuestra que las ecuaciones funcional diferenciales pertenecen a una clase de un sistema axiomático llamado sistema funcional-diferencial abstracto. El trabajo se realizó sin pretender que fuese mi tesis de licenciatura, no obstante ya casi concluido usted lo propuso como mi trabajo de tesis a la Dirección de la Escuela, misma que accedió sin objeción alguna. Gracias Dr. Seibert por su apoyo y su indispensable dirección.

Dr. Seibert, los alumnos de la ESFM siempre le reconocimos su alto nivel académico, si bien justo, temíamos y apreciábamos su exigencia por el rigor matemático. Me siento orgulloso de ser uno de los dos únicos que se titularon en la licenciatura con una tesis bajo su dirección y cuyo contenido rebasan por mucho ese nivel. El otro estudiante a quien usted dirigió su tesis es Roberto Acosta Abreu, quien lamenta no poder estar presente en este homenaje pero que le envía por mi conducto un afectuoso saludo.

No obstante que llevé a feliz término mi trabajo de tesis, pienso que quedé en deuda académica con usted, pues yo tenía encomendado escribir algunos artículos acerca de los resultados que aparecieron en la misma. Siempre he lamentado no haber hecho mi tarea.

Una de sus acciones que hablan de su bondad y generosidad ocurre cuando un día que yo tenía algunos problemas económicos, acudí a usted con la confianza que siempre me inspiraba y le dije: "Seibert, ¿podría prestarme 500 pesos? a lo cual sin pensarlo respondió afirmativamente. Era un día de quincena, nos pagaban en efectivo en un sobre de papel manila. Entonces nos dirigimos a la caja del IMP a cobrar nuestros respectivos sueldos. Recuerdo que yo cobré y usted los hizo después de mi, pues siempre fue amable y cortés con todos. Cuando usted recibió su sobre, lo tomó y sin abrirlo me lo entregó con el contenido íntegro, a lo que yo respondí, no Seibert, solamente necesito que me preste $500, eso era para mi mucho dinero. Usted respondió que no me preocupara, que me regalaba la cantidad que estaba en el sobre. Es una deuda que nunca le pagué pues usted no aceptó que yo lo hiciera. Gracias Seibert y, como un día me dijo Rosy, mi deuda con usted va más allá de lo académico y lo económico.

Otro de mis agradables pero penosos recuerdos es cuando estuve enfermo. Realmente no estaba enfermo, me había lastimado severamente el oído por lo cual perdí el equilibrio durante un par de meses, problema que me obligaba a estar en cama. No tenía ningún otro malestar, pero era imposible permanecer en pie. Se trataba de un mareo permanente, apenas podía leer por pequeños lapsos, así que me rodeaba de todo tipo de lectura recreativa, nada de matemáticas. Un día sorpresivamente recibí su visita, pues ya me había ausentado varios días del IMP. Uno de mis compañeros de vivienda corrió a avisarme que mi director de tesis deseaba verme, su aviso llegó demasiado tarde, pues usted me encontró rodeado de revistas de los Supermachos y de la familia Burrón, por lo cual me sentí muy apenado, por supuesto también me sentí halagado por su visita, fue para mí un verdadero honor. Gracias Dr. Seibert por esa atención que tuvo conmigo.

Dr. Seibert, siempre me ha agradado pensar que usted volvió a nuestro país, exclusivamente a apoyarme en mi formación desde el inicio hasta mi titulación. Pues usted ingresa a la ESFM en 1966, cuando yo lo hago como estudiante y se retira de esa escuela, de hecho de México, en 1971, justo después de titularme. Su partida solamente esperaba que presentara mi examen de titulación. Gracias por brindarme ese privilegio. Por cierto. ese mismo año yo también me retiro del IMP.

Quisiera terminar mi participación recordando una charla que tuve con usted. Precisamente en vísperas de su partida de México, con tristeza le pregunté: "Dr. Seibert: ¿cuándo lo volveré a ver? ¿cuándo regresará a México?, a lo que usted respondió: "mis órbitas no son cerradas". Me hace feliz que usted se haya equivocado en ese teorema, resultó falso y además me alegro que en su sistema dinámico personal la ciudad de México hay resultado un atractor estable.

Enhorabuena querido maestro y amigo Peter Seibert. Disfruta esta tu fiesta.

Gracias.

En el **Departamento de Matemáticas** de la **UAM Iztapalapa**, se llevó a cabo con gran emotividad la

Conferencia sobre Sistemas Dinámicos,

para festejar el 81 aniversario del

Dr. Peter Seibert Kopp,

los días 27 y 28 de noviembre de 2009, organizado por Martha Álvarez Ramírez, Luis Aguirre Castillo y Julio Ernesto Solís Daun.

Se dictaron las conferencias

Peter Seibert en México
Antonio Rivera Figueroa
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav

The Threshold Principle
Luis Aguirre Castillo
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, MEXICO

Applications and implications of Seibert's Reduction Principle in chemical reactor engineering
Jesús Álvarez Calderón
UAM-Iztapalapa, MEXICO

Stability of Switched Systems
Andrea Bacciotti
Politecnico di Torino, ITALY

Julio Ernesto Solís, Martha Álvarez, Veronica Medina, Oscar Monroy, Mario Pineda.

Andrea Bacciotti, Luis Aguirre, Boris Kalitine, Andrzej Pelczar.

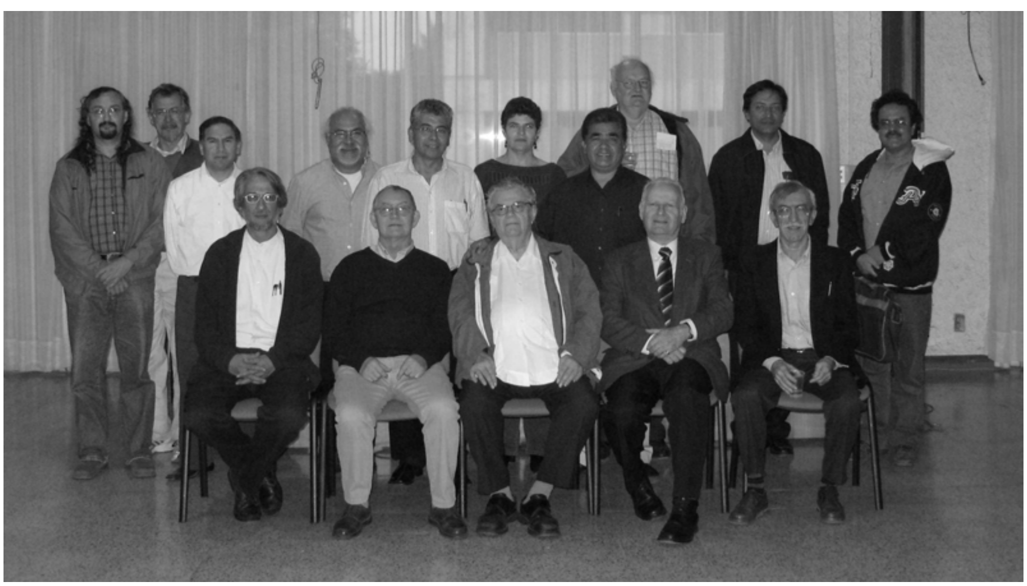
The solution of the problem Florio-Seibert for B-stability
Boris Kalitine
Minsk University, BIELORUSIA

Non-linear optimal control and sub-Riemannian geometry
Felipe Monroy-Pérez
Departamento de Ciencias Básicas, UAM-Azcapotzalco, MEXICO

A bounded control for LPV systems with bounded rates of parameters variations
Guillermo Oaxaca
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa, MEXICO
Y. Tang
Facultad de Ingeniería, UNAM, MEXICO

On Generalized Semi-Dynamical Systems on Metric Spaces. Selected Topics
Andrzej Pelczar
Uniwersytet Jagiellon'ski, POLAND

Peter Seibert con dos de sus exalumnos de la ESFM del IPN, Ernesto Lacomba y Antonio Rivera



Organizadores y ponentes.

PREMIO SCOPUS A ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA

Scopus es una base de datos de la Editorial Elsevier, con sede en Ámsterdam, Holanda; engloba una colección multidisciplinar a nivel mundial de resúmenes, referencias e índices de literatura científica, técnica y médica. Entre las materias principales que comprende su acervo se encuentran Agricultura, Biología, Química, Matemáticas, Física, Psicología y Ciencias Sociales. Su función como herramienta de evaluación supone búsqueda sobre las citas en artículos para analizar la producción científica y generar informes en base a indicadores y diversos parámetros.

A partir de la información albergada en Scopus, el pasado Octubre se otorgó al Dr. Onésimo Hernández Lerma el premio Scopus 2008 por el mayor número de citas a un autor realizadas por otros investigadores, según el reporte más de 600.

Onésimo Hernández Lerma es investigador adscrito al Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav). Tiene en su haber el Premio Nacional de Ciencias y Artes al cual se hizo acreedor en 2001. Fue jefe del departamento de Matemáticas del Cinvestav. Ha sido profesor en diversas instituciones como la Universidad Autónoma Metropolitana, el Instituto Politécnico Nacional, y ha sido profesor o investigador visitante en instituciones nacionales y extranjeras. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores con nivel III.

Su labor de formación de recursos humanos a nivel de posgrado cuenta con 15 estudiantes de doctorado y 35 de maestría.

Sus líneas de investigación son el control óptimo de sistemas estocásticos, la teoría de juegos estocásticos, la programación lineal infinita, los procesos de Markov, y el tema “control adaptable”. Sus publicaciones le han valido el reconocimiento internacional de creador de “la escuela mexicana de control estocástico”. Cuenta con más de 100 artículos de investigación en revistas especializadas y 12 libros y monografías.

Avisos

CARTA INFORMATIVA

SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 59,
Enero de 2009

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. (55) 5747-3800 ext. 6414
smm@smm.org.mx