Derivación de una función monótona

Fernando Galaz Fontes
CIMAT
galaz@cimat.mx

1. Introducción

Una función continua, definida en un intervalo, puede no ser derivable. Por ejemplo, la función valor absoluto no es derivable en $x = 0$. A partir de ella podemos, sin dificultad, construir una función que no sea derivable en un número finito de puntos distintos.

Durante gran parte del siglo XIX se pensó que cualquier función continua siempre era derivable, excepto posiblemente en un conjunto "pequeño"de puntos. Causando gran sorpresa, en 1872 Karl Weierstrass dio a conocer una función continua que en ningún punto es derivable [12]. Esto llevó a buscar otra propiedad que "implicara"la derivabilidad.

En 1901 Henri Lebesgue construyó la integral que ahora, justificadamente, lleva su nombre y con la cual generalizó la integral definida por Bernhard Riemann en 1854 [5, 6, 8]. Su punto de partida fue el de poder "medir" una clase amplia de conjuntos de números reales. De particular relevancia resultaron ser los conjuntos con medida cero, los cuales, entre otras cosas, permitieron precisar la idea de "pequeño". En este contexto se busca entonces una propiedad de la cual se siga la derivabilidad en casi todas partes (c.t.p.), esto es, excepto en un conjunto de medida cero.

Por otra parte, el propósito de extender el teorema fundamental del Cálculo condujo naturalmente a buscar derivar una integral, esto es, una función de la forma

$$F(x) := \int_a^x f,\ a \leq x \leq b,$$

siendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función (Lebesgue-)integrable.

Denotemos por f_+ y f_- las partes positiva y negativa de f y consideremos $F_1(x) = \int_a^x f_+,\ F_2(x) = \int_a^x f_-$. Entonces F_1 y F_2 son funciones monótonas-crecientes tales que $F = F_1 - F_2$. Así, utilizando esta expresión, el poder derivar funciones monótonas-crecientes permitirá derivar una integral. Surge de esta forma la motivación para determinar si cualquier función monótona-creciente es derivable c.t.p.

En 1904 Lebesgue respondió la cuestión anterior estableciendo que si f es una función monótona continua, entonces f es derivable c.t.p. [7]. Siete años después William Henry Young probó que la condición de continuidad no se requiere [10, p. 206].

El propósito de este trabajo es exponer con detalle una demostración del teorema de Lebesgue sobre la derivación de una función monótona basada en el lema de recubrimiento de Vitali, cuya demostración también establecemos. Hemos incluido además las propiedades de la medida de Lebesgue necesarias para nuestro desarrollo. Las pruebas correspondientes pueden encontrarse, por ejemplo, en [1, 2, 4, 9, 10].

2. Medida de Lebesgue

La definición de conjunto medible que presentaremos es equivalente con la de Lebesgue y fue introducida por Constantin Carathéodory en 1918 [3,5]. Respecto a la de Lebesgue, tiene la ventaja de que se puede generalizar con mayor facilidad y describir más rápidamente.

Consideremos $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Naturalmente, la medida del intervalo abierto $I = (a, b)$ es su longitud: $m(I) := b - a$.

Definición 1. La *medida exterior* de $A \subset \mathbb{R}$ es

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las colecciones de intervalos abiertos $I_n,\ n \in \mathbb{N}$, tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Observemos que $0 \leq m^*(E) \leq \infty$. La medida exterior tiene las siguientes propiedades básicas.

Lema 1.

i) (Monotonía) Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.

ii) (σ-subaditividad) Si $A_n \subset \mathbb{R}$, entonces $m^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

Definición 2. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es *medible*, si

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E),\ \forall\, A \subset \mathbb{R}.$$

En este caso su medida es $m(E) := m^*(E)$.

Los conjuntos medibles tienen las siguientes propiedades básicas.

Teorema 1.

i) $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}$ *son conjuntos medibles.*

ii) Si $E \subset \mathbb{R}$ *es medible, entonces* E^c *medible.*

iii) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una colección de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que son medibles, entonces* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *es medible.*

iv) Si $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una colección de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que son medibles y disjuntos entre sí, entonces*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

v) Si $U \subset \mathbb{R}$ *es abierto, entonces* U *es medible.*

Observación 1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Si $m^*(A) < \infty$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un abierto U tal que $A \subset U$ y $m(U) < m^*(A) + \epsilon$.

Demostración A partir de la hipótesis se obtiene una colección de intervalos abiertos y acotados $I_n,\ n \in \mathbb{N}$, tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < m^*(A) + \epsilon$. Tomando $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ resulta lo deseado. $\square$

Conjuntos de medida cero

Definición 3. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tiene *medida cero* si $m^*(E) = 0$. Es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe una colección de intervalos abiertos y acotados $I_n,\ n \in \mathbb{N}$, tal que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \epsilon.$$

Si $E \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero, directamente de la definición 2 resulta que E es un conjunto medible y que $-E := \{-x : x \in E\}$ también tiene medida cero. Por otra parte, como consecuencia del lema 1 se obtiene que si $E_n, n \in \mathbb{N}$, tiene medida cero, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ tiene medida cero.

También es sencillo verificar que $m(\{p\}) = 0,\ \forall\, p \in \mathbb{R}$. Si E es numerable, se sigue que $m(E) = 0$. En particular, el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales tiene medida cero.

3. Lema de recubrimiento de Vitali

Demostraremos en seguida un resultado establecido por Giuseppe Vitali en 1908 [11], el cual indica que de cierta clase de cubiertas (llamadas ahora de Vitali) de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se puede extraer una subcolección numerable y formada por conjuntos ajenos, que cubre a A c.t.p. La prueba que presentamos se debe a Stefan Banach [10, p. 335].

Definición 4. Sea $\mathcal{C}$ una colección de intervalos cerrados y acotados, cada uno de longitud positiva. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *cubierta de Vitali* de $A \subset \mathbb{R}$ si, para cada $x \in A$ y para cada $\epsilon > 0$ existe un intervalo $I \in \mathcal{C}$ tal que $x \in I$ y $m(I) \le \epsilon$.

Ejemplo 1. La colección $\mathcal{C}$ formada por todos los intervalos $[a, b]$ donde a, b son números racionales y $a < b$, es una cubierta de Vitali de $\mathbb{R}$.

Lema 2. *Supongamos que* $\mathcal{C}$ *es una cubierta de Vitali de* $A \subset \mathbb{R}$ *y que* $U \subset \mathbb{R}$ *es un conjunto abierto. Entonces*

$$\mathcal{C}_U := \{I \in \mathcal{C} : I \subset U\}$$

es una cubierta de Vitali de $A \cap U$*. En particular, si* $A \subset U$*, entonces* $\mathcal{C}_U$ *es una cubierta de Vitali de* A*.*

Demostración Consideremos $x \in A \cap U$ y $\epsilon > 0$. Puesto que U es abierto, existe $r > 0$ tal que $r \le \epsilon$ y $[x - r, x + r] \subset U$. Usando ahora la hipótesis obtenemos un intervalo $I \in \mathcal{C}$ tal que $m(I) \le r$ y $x \in I$. Luego, si $y \in I$ se cumple que $|x - y| \le r$. Esto indica que $I \in \mathcal{C}_U$. $\square$

Lema 3 (de recubrimiento de Vitali)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}$*. Si* $m^*(A) < \infty$ *y* $\mathcal{C}$ *es una cubierta de Vitali de* A*, entonces existe una colección numerable* $\widetilde{\mathcal{C}} = \{I_\ell : \ell \in L\} \subset \mathcal{C}$ *de intervalos disjuntos tal que*

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{\ell\in L} I_\ell\right) = 0. \tag{1}$$

Además, para cada $\epsilon > 0$ *existe una colección finita* $\{I_1, \cdots, I_n\} \subset \widetilde{\mathcal{C}}$ *tal que*

$$m^*\left(A \setminus \bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell\right) \le \epsilon. \tag{2}$$

Demostración Fijemos un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}$ tal que $m(U) < \infty$ y $A \subset U$. Asímismo, supondremos que $I \subset U,\ \forall\, I \in \mathcal{C}$.

Definiremos los intervalos I_ℓ procediendo inductivamente. Como I_1 tomemos cualquier $I \in \mathcal{C}$. Supongamos en seguida que ya se eligió una colección de intervalos disjuntos $I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{C}$. Si $A \subset \cup_{\ell=1}^{n} I_\ell$, la conclusión es clara. De lo contrario, consideremos el conjunto

$$\mathcal{C}_n := \{I \in \mathcal{C} : I \cap (\cup_{\ell=1}^{n} I_\ell) = \emptyset\},$$

y definamos

$$k_n := \sup\{m(I) : I \in \mathcal{C}_n\}.$$

Como $\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell \subset U$ es cerrado, a partir de la observación anterior resulta que $\mathcal{C}_n \neq \emptyset$. Luego, $0 < k_n < \infty$. Tomamos ahora como I_{n+1} cualquier intervalo en $\mathcal{C}_n$ tal que

$$m(I_{n+1}) > \frac{1}{2} k_n. \tag{3}$$

Si el procedimiento anterior termina en algún “paso"n, la conclusión es clara. De lo contrario, se obtiene una colección $\{I_\ell : \ell \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ de intervalos disjuntos. Probaremos primero (2).

Sea $\epsilon > 0$. Ya que $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell \subset U$, se cumple que $\sum_{\ell=1}^{\infty} m(I_\ell) \le m(U) < \infty$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\ell=n+1} m(I_\ell) \le \frac{\epsilon}{5}.$$

Sea $x \in B \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell)$. Como $\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell$ es cerrado, existe $I \in \mathcal{C}_n$ tal que $x \in I$. Si $I \cap I_\ell = \emptyset \; \forall \, \ell \geq n+1$, a partir de (3) resulta que $m(I_\ell) \geq \frac{m(I)}{2} > 0, \;\; \forall \, \ell \geq n+1$. Esto implicaría que $\sum_{\ell=1}^{\infty} m(I_\ell) = \infty$, lo cual no es posible. Tomemos entonces N como el menor natural tal que $I \cap I_N \neq \emptyset$. Observemos que $N \geq n+1$ y

$$m(I) \leq k_{N-1} \leq 2m(I_N).$$

Fijemos $p \in I \cap I_N$ y sea p_N el punto medio de I_N. Entonces, cuando $x \in I$ se cumple que

$$|x - p_N| \leq |x-p| + |p - p_N| \leq m(I) + \frac{m(I_N)}{2} \leq \frac{5}{2} m(I_N).$$

Esto indica que x pertenece al intervalo J_N, cuyo punto medio es p_N y de longitud total $5m(I_N)$. Así, $A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell) \subset \cup_{\ell=n+1}^{\infty} J_\ell$. Por lo tanto,

$$m^* \left(A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell) \right) \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} m(J_\ell) = 5 \sum_{\ell=n+1}^{\infty} m(I_\ell) \leq \epsilon.$$

Como $A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell) \subset A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{n} I_\ell)$, de lo recién establecido se sigue que $m^* \left(A \setminus (\bigcup_{\ell=1}^{\infty} I_\ell \right) \leq \epsilon$. Siendo $\epsilon > 0$ arbitrario, se obtiene (1). □

4. Funciones monótonas

En adelante, I será siempre un intervalo. Si $I = [a, b]$, entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. El conjunto de sus puntos interiores se denotará por I^0.

Definición 5. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es:

a) *monótona-creciente*, si

$$w, x \in I, \; w < x \Rightarrow f(w) \leq f(x).$$

b) *monótona-decreciente*, si

$$w, x \in I, \; w < x \;\Rightarrow\; f(w) \geq f(x).$$

c) *monótona*, si es monótona-creciente o monótona-decreciente.

Ejemplo 2. Sea $f : [a, b] \to [0, \infty]$ una función integrable y definamos $F(x) := \int_a^x f, \; a \leq x \leq b$. Consideremos $a \leq w < x \leq b$. A partir de las propiedades de la integral de Lebesgue, resulta

$$F(x) - F(w) = \int_a^x f - \int_a^w f = \int_w^x f \geq 0,$$

lo cual indica que F es una función monótona-creciente.

Lema 4. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función monótona-creciente. Si $a, b \in I$ y $a \leq w_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq w_n \leq x_n \leq b$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(w_j)) \leq f(b) - f(a).$$

Demostración Sean $a, b \in I$ y $a \leq w_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq w_n \leq x_n \leq b$. Siendo f monótona creciente, resulta

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(w_j)) &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_{n-j+1} - f(w_{n-j+1})) \\
&= f(x_n) - \sum_{j=1}^{n-1} (f(w_{j+1}) - f(x_j)) \\
&\quad - f(w_1) \\
&\leq f(x_n) - f(w_1) \leq f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

□

5. Derivada de una función monótona

Los siguientes conceptos desempeñan para una función un papel semejante al que el $\liminf$ y el $\limsup$ tienen respecto a una sucesión.

Definición 6. Sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función y $p \in I^0$. Entonces:

a) $\limsup_{h \to p^+} g(h) := \inf_{\delta > 0} \sup\{g(h) : 0 < h - p < \delta\}$.

b) $\liminf_{h \to p^+} g(h) := \sup_{\delta > 0} \inf\{g(h) : 0 < h - p < \delta\}$.

c) $\limsup_{h \to p^-} g(h) := \inf_{\delta > 0} \sup\{g(h) : 0 < p - h < \delta\}$.

d) $\liminf_{x \to p^-} g(h) := \sup_{\delta > 0} \inf\{g(h) : 0 < p - h < \delta\}$.

Observemos que

$$\liminf_{h \to p^-} g(h) \leq \limsup_{h \to p^-} g(h), \;\; \liminf_{h \to p^+} g(h) \leq \limsup_{h \to p^+} g(h). \tag{4}$$

Sea $L \in \mathbb{R}^*$. Como en el caso del límite de una sucesión, la igualdad $\lim_{x \to p} g(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}^*$, equivale a

$$\begin{aligned}
\limsup_{h \to p^+} g(h) &= \liminf_{h \to p^+} g(h) \\
&= \limsup_{h \to p^-} g(h) = \liminf_{h \to p^-} g(h) = L.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Sea $p \in \mathbb{R}$ y χ la función característica de $\mathbb{Q}$, esto es $\chi(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $\chi(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Puesto que en cada intervalo abierto no vacío hay números racionales, resulta que

$$\begin{aligned}
\limsup_{h \to p^+} \chi(h) &:= \inf_{\delta > 0} \sup\{\chi(h) : 0 < h - p < \delta\} \\
&= \inf_{\delta > 0} \{1\} = 1.
\end{aligned}$$

Asímismo, se cumple que

$$\liminf_{h \to p^+} \chi(h) = 0, \; \limsup_{h \to p^-} \chi(h) = 1, \; \liminf_{h \to p^-} \chi(h) = 0.$$

El siguiente ejemplo ilustra los conceptos anteriores y muestra que las cubiertas de Vitali aparecen de manera natural cuando se trabaja con el $\liminf$ o el $\limsup$.

Ejemplo 4. Sea $g : I \to \mathbb{R}$ y $u, v \in \mathbb{R}$.
1) Consideremos el conjunto

$$A := \{p \in I : v < \limsup_{h\to p^+} g(h)\}$$

y $p \in A$. Directamente de la definición, se sigue que para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño se cumple que $v < \sup\{g(h) : p < h < p + \delta\}$. Luego, en tal caso podemos encontrar $h \in (p, p+\delta)$ tal que $g(h) > v$. Esto muestra que la colecciòn

$$\mathcal{C} := \{[p, h] : p, h \in I,\ p < h,\ v < g(h)\}$$

es una cubierta de Vitali de A.
2) Consideremos ahora el conjunto

$$B := \{p \in I, \liminf_{h\to p^+} g(h) < u\}.$$

y $p \in B$. Directamente de la definición resulta que, para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se cumple que $\inf\{g(h) : p < h < p + \delta\} < u$. En tal caso es posible encontrar $h \in (p, p+\delta)$ tal que $g(h) < u$. Esto muestra que la colección

$$\mathcal{C} := \{[p, h] : p, h \in I,\ p < h,\ g(h) < u\}$$

es una cubierta de Vitali de B.

Con los conceptos recién introducidos estudiaremos ahora el *cociente de incrementos* de f en x, esto es, la función

$$g(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ h \neq 0.$$

Definición 7. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x \in I^0$. Definimos:

a) La *derivada superior derecha* en x como

$$D^+ f(x) := \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

b) La *derivada inferior derecha* en x como

$$D_+ f(x) := \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(p)}{h}.$$

c) La *derivada superior izquierda* en x como

$$D^- f(x) := \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

d) La *derivada inferior izquierda* en x como

$$\begin{aligned} D_- f(x) &:= \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Para la función valor absoluto, $V(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$D^+ V(0) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{V(h) - V(0)}{h} = \limsup_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1.$$

Procediendo análogamente, encontramos

$$D_+ V(0) = 1,\ D^- V(0) = -1,\ D_- V(0) = -1.$$

Lema 5. *Si para cualquier función monótona-creciente $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ se cumple que $D^+ g \le D_- g$ c.t.p., entonces para cualquier función monótona-creciente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se cumple que*

$$0 \le D^+ f = D_+ f = D^- f = D_- f \text{ c.t.p.}$$

Demostración Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona-creciente. Se cumple entonces que $0 \le D^+ f$ y resta probar que

$$D^+ f\ \le D_- f\ \le D^- f\ \le D_+ f\ \le D^+ f \text{ c.t.p.}$$

La primera de las desigualdades anteriores se satisface por hipótesis. De acuerdo con (4), la segunda y la cuarta se cumplen para cualquier función. Así, sólo falta establecer la tercera desigualdad:

$$D^- f\ \le D_+ f \text{ c.t.p.} \tag{5}$$

Definamos la función g por $g(x) := -f(-x)$, $\forall x \in [-b, -a]$. Notemos que g sigue siendo monótona-creciente. Sea $h > 0$. Observando que

$$\begin{aligned} \frac{g(-x+h) - g(x)}{h} &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \\ \frac{g(-x) - g(-x-h)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \end{aligned}$$

resulta que $D^+ g(-x) = D^- f(x)$ y $D_- g(-x) = D_+ f(x)$. De aquí se obtiene (5). $\square$

Teorema 2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona-creciente, entonces f es derivable c.t.p.*

Demostración Sea $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función monótona-creciente. En virtud del lema anterior, probaremos primero que el conjunto

$$E := \{x \in (c, d) : D_- g(x) < D^+ g(x)\} \tag{6}$$

tiene medida cero.Para cada $u, v \in \mathbb{Q}$ consideremos el conjunto

$$E_{u,v}\ :=\ \{x \in (c, d) : D_- g(x) < u < v < D^+ g(x)\}.$$

Como estos conjuntos forman una familia numerable y E es su unión, para concluir que $m(E) = 0$ probaremos que $m^*(E_{u,v}) = 0$, $\forall u, v \in \mathbb{Q}$.

Sean $u, v \in \mathbb{Q}$. A continuación construiremos dos cubiertas de Vitali para el conjunto $E_{u,v}$. Consideremos $x \in E_{u,v}$. Entonces

$$u > D_- g(x) = \sup_{\delta>0} \inf \left\{ \frac{g(x) - g(x-h)}{h} : 0 < h < \delta \right\}. \tag{7}$$

Luego, $u > \inf\{\frac{g(x)-g(x-h)}{h} : 0 < h < \delta\}$, para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Esto implica que existen números h que son positivos y arbitrariamente pequeños tales que $[x-h, x] \subset (a, b)$ y $g(x) - g(x-h) < uh$. Notemos que la colección $\mathcal{C}_u$ de los intervalos correspondientes $[x-h,x]$ es una cubierta de Vitali de $E_{u,v}$.

Como $x \in E_{u,v}$ también se cumple que

$$v < D^+g(x) = \inf_{\delta>0} \sup \left\{ \frac{g(x+k)-g(x)}{k} : 0<k<\delta \right\}. \tag{8}$$

Luego, $v < \sup \left\{ \frac{g(x+k)-g(x)}{k} : 0<k<\delta \right\}$ para cualquier $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Esto implica que existen números k que son positivos y arbitrariamente pequeños tales que $[x, x+k] \subset (c,d)$ y $vk < g(x+k) - g(x)$. Notemos que la colección $\mathcal{C}_v$ de los intervalos correspondientes $[x, x+k]$ es una cubierta de Vitali de $E_{u,v}$.

Sea $\mu := m^*(E_{u,v})$. Para establecer que $\mu = 0$, consideremos $\epsilon > 0$. Elijamos después un conjunto abierto $W \subset (c,d)$ tal que $E_{u,v} \subset W$ y $m(W) < \mu + \epsilon$. Hemos visto que la subcolección de $\mathcal{C}_u$ formada por aquellos intervalos contenidos en W forman una cubierta de Vitali para $E_{u,v}$. Luego, aplicando el lema 3 junto con el lema de recubrimiento de Vitali se obtiene una familia finita de intervalos disjuntos $I_r := [x_r - h_r, x_r]$, $r = 1, \dots, n$, que están contenidos en W y cumplen que $m^*(E_{u,v} \setminus \bigcup_{r=1}^n I_r) \le \epsilon$. Hagamos $A := E_{u,v} \cap (\bigcup_{r=1}^n I_r)$. Entonces, por la subaditividad de m^*, resulta

$$m^*(A) \ge \mu - m^*(E_{u,v} \setminus \bigcup_{r=1}^n I_r) \ge \mu - \epsilon.$$

Por la definición de los números $h > 0$, observemos que al sumar sobre estos intervalos, se obtiene

$$\sum_{j=1}^n (g(x_r) - g(x_r - h_r)) \le u \sum_{r=1}^n h_r \le u\, m(W) \le u\,(\mu + \epsilon). \tag{9}$$

Por otra parte, sea A_0 el subconjunto de A que consiste de aquellos puntos que no son extremo de alguno de los intervalos $I_1, \dots, I_n$. La subcolección de $\mathcal{C}_v$ formada por aquellos intervalos contenidos en $\bigcup_{r=1}^n I_r^0$ forma entonces una cubierta de Vitali de A_0. De ella, usando nuevamente el lema 3 junto con el lema de recubrimiento de Vitali, podemos elegir una familia finita de intervalos disjuntos $J_s := [y_s, y_s + k_s]$, $s = 1, \dots, N$, que están contenidos en $\bigcup_{j=1}^n I_j^0$ y tales que

$$m^*(A \setminus \bigcup_{s=1}^N J_s) = m^*(A_0 \setminus \bigcup_{s=1}^N J_s) \le \epsilon.$$

Tomemos $B := A \cap (\bigcup_{s=1}^N J_s)$. Entonces

$$m^*(B) \ge m^*(A) - \epsilon \ge \mu - 2\epsilon.$$

Luego, al sumar sobre todos estos intervalos resulta

$$\sum_{s=1}^N (g(y_s + k_s) - g(y_s)) \ge v \sum_{s=1}^N k_s \ge v m^*(B) \ge v\,(\mu - 2\epsilon). \tag{10}$$

Observemos que cada intervalo J_s está contenido en algún intervalo I_r. Así, para cada $r = 1, \dots, n$, al sumar sobre aquellos s tales que $J_s \subset I_r$ y utilizar el lema 4 , se obtiene

$$\sum_{J_s \subset I_r} (g(y_s + k_s) - g(y_s)) \le g(x_r) - g(x_r - h_r).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{s=1}^N (g(y_s + k_s) - g(y_s)) \le \sum_{r=1}^n (g(x_r) - g(x_r - h_r)). \tag{11}$$

De acuerdo con (9)-(11), esto implica que $v(\mu - 2\epsilon) \le u(\mu + \epsilon)$. Haciendo $\epsilon \to 0$, resulta $v\,\mu \le u\,\mu$. Ya que $u < v$, concluimos que $\mu = 0$.

De (6) y el lema 5 se sigue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe c.t.p., aunque puede tomar a ∞ como valor. Para concluir lo deseado sólo resta entonces establecer que el conjunto

$$E_\infty := \{x \in (a,b) : D^+f(x) = \infty\}$$

tiene medida cero.

Observemos que $E_\infty \subset \{x \in (a,b) : n < D^+g(x)\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Procediendo como se hizo a partir de (8) y usando el lema de recubrimiento de Vitali, podemos encontrar ahora una colección de intervalos disjuntos $J_s := [y_s, y_s + k_s] \subset W$, $s \in \mathbb{N}$, que cumplen $nk_s \le (f(y_s + k_s) - f(y_s))$, $\forall\, s \in \mathbb{N}$ y

$$m^*(E_\infty) = m^*\left(E_\infty \cap \bigcup_{s=1}^\infty I_s\right) \le \sum_{s=1}^\infty k_s.$$

Usando ahora el lema 4, resulta

$$\begin{aligned} m^*(E_\infty) \le \sum_{s=1}^\infty k_s \le \frac{1}{n} \sum_{s=1}^\infty (f(y_s + k_s) - f(y_s)) \\ \le \frac{f(b) - f(a)}{n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Esto implica que $m^*(E_\infty) = 0$. $\square$

6. Bibliografía

1. E. Asplund y L. Bungart, *A first course in integration*. Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1966.
2. J. C. Burkill, *The Lebesgue integral*. Cambridge University Press, London, 1951.
3. C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1st ed, Berlin: Leibzig 1918, 2nd ed, New York: Chelsea 1948.
4. F. Galaz Fontes, *Medida e integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$. Oxford University Press México, 2002.
5. F. Galaz García, 'Definiciones originales de la integral y la medida de Lebesgue'. *Miscelánea Matemática* SMM, 44(2007), 83-100.

   http://www.math.umd.edu/~galazg/comentarios_lebesgue.pdf
6. H. Lebesgue, 'Sur une généralisatione de líntérale définie'. Ac. Sci. C. R. **132**(1901), 1025-1028.
7. H. Lebesgue, *Leçons sur l'Integration et la Recherche des Fonctions Primitives*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.
8. B. Riemann, 'Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe'. Werke, 1854.
9. H. Royden, *Real analysis*. Macmillan Publishing Co., New York, 1968.
10. K. R. Stromberg,*An introduction to classical real analysis*.Wadsworth Inc., Belmont, California, 1981.
11. G. Vitali, 'Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali'. Atti Accad. Sci. Torino **43**(1908), 75-92.
12. K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Band 2, Abhandlungen II.

Convocatoria al Premio Sotero Prieto 2010

Fecha límite para recibir toda la documentación: 30 de junio de 2010

La Sociedad Matemática Mexicana convoca a los profesionistas en matemáticas recién graduados, a presentar su tesis de licenciatura o su trabajo terminal, para el Premio Sotero Prieto a la mejor tesis de Licenciatura en Matemáticas 2010 bajo las siguientes bases:

1.- El trabajo, sobre un tema de matemáticas, deberá haber sido presentado en alguna Institución Mexicana de Educación Superior para obtener el título de Matemático o equivalente.
2.- La fecha de obtención del título deberá estar comprendida en el lapso del 1 de junio de 2009 al 31 de mayo de 2010.
3.- Se deberá enviar, por triplicado:
- Copia del trabajo mecanografiado o tipografiado.
- Documento probatorio de la fecha de obtención del título.
- Documento en el que conste oficialmente que el trabajo enviado a concurso fue presentado como requisito para la obtención del título.

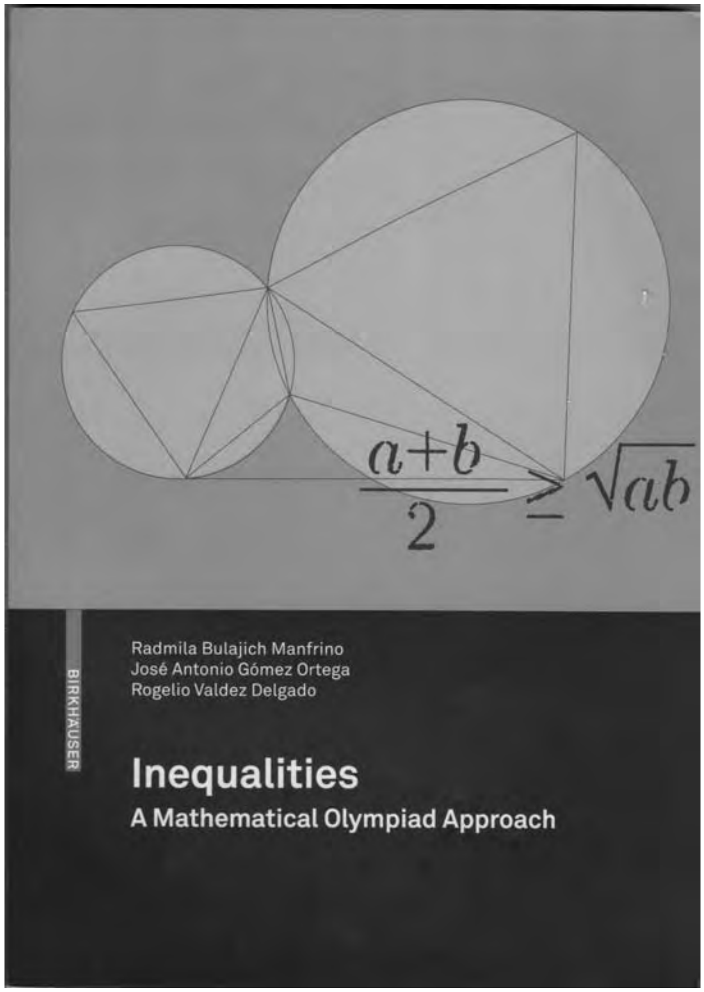
4.- Se deberá anexar a la documentación, por triplicado, una breve semblanza del candidato que incluya sus datos personales, historial académico, el nombre del asesor o director del trabajo y los nombres de los sinodales del examen profesional.
5.- El jurado será designado por la comisión del Premio Sotero Prieto y estará integrado por especialistas en diversas ramas de las ciencias matemáticas que gozan de reconocido prestigio.
6.- El Premio Sotero Prieto incluye una medalla y un diploma.
7.- Se otorgarán menciones honoríficas a juicio del jurado.
8.- La decisión del jurado será inapelable.
9.- La entrega del premio será durante la ceremonia de inauguración del XLIII Congreso Nacional de la SMM, en la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
10.- Cualquier situación no prevista en esta convocatoria, será resuelta por la Comisión del Premio Sotero Prieto.
Los trabajos podrán ser entregados en cualquiera de las dos siguientes direcciones:

Lic. Olivia Lazcano
Departamento de Matemáticas (cubículo 14)
Cinvestav-IPN
Av. IPN 2508
Col. San Pedro Zacatenco 07360
México, DF.
Tel.: (55) 57.47.3800 ext. 6414

Lic. Aída Lazcano
Instituto de Matemáticas (cubículo 122)
Área de la Investigación Científica
Circuito Exterior s/n
Ciudad Universitaria. 04510
México, DF.
Tel.: (55) 56.22.4481 y 82

Comité del Premio Sotero Prieto

Dr. Marcelo Aguilar González de la Vega (IMUNAM)
Dr. Rogelio Fernández Alonzo (UAM-I)
Dr. Arturo Olvera Chávez (IIMAS)
Dr. Zeferino Parada García (ITAM)
Dra. Bertha María Tomé Arreola (ESFM-IPN)
Dr. Miguel Alejandro Xicoténcatl Merino (Cinvestav-IPN)



Reseña

Este libro presenta desigualdades clásicas y desigualdades específicas que son particularmente útiles para atacar y resolver problemas de optimización. La mayoría de los ejemplos, ejercicios y problemas que aparecen en el libro, tienen su origen en concursos de la Olimpiada de Matemáticas alrededor del mundo. El material esta dividido en cuatro capítulos. En el capítulo 1, se presentan desigualdades algebraicas, comenzando con las más básicas para terminar con técnicas más sofisticadas de resolver problemas de desigualdades. En el capítulo 2 se tratan desigualdades geométricas y en el 3 se encuentra una lista de problemas de desigualdades que aparecieron en estos concursos en los últimos 14 años. Finalmente, sugerencias y soluciones se presentan para todos los ejercicios y problemas en el capítulo 4.

FIRST ANNOUNCEMENT

West Coast Operator Algebra Seminar 2010

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

The 2010 West Coast Operator Algebra Seminar will be held at Pachuca, Hidalgo,México, from Thursday September 2nd through Saturday September 4th.

The seminar will take place at Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), at the Centro de Investigación en Matemáticas (CIMA).

A list of invited speakers will be posted shortly.

CONFERENCE WEBSITE: To be announced.

REGISTRATION: The link to register will be available at the conference website shortly.

There will be no registration fee.

ACCOMODATION: There will be limited accommodation at the guest house of the UAEH, mainly for invited speakers. Other accommodation options will be announced later.

CONFERENCE TRIP: On Friday September 3rd there will be a trip to Teotihuacan, site of the world famous Sun and Moon Pyramids. Registration will be required. The details will be announced as soon as they are available.

CONFERENCE BANQUET: There will be a conference banquet on Friday September 3rd. The cost will be approximately USD 25.

GRADUATE STUDENTS: Limited support may be available for US based participants, depending on funding. Please let us know if you will require support when you register. The deadline for applications of this support will be July 26. We also expect to have some limited support for México based participants.

The Local Organizing Committee

Orlando Avila-Pozos avilap@uaeh.edu.mx

Benjamin Itza-Ortiz itza@uaeh.edu.mx

Ruben Martinez-Avendaño rubenma@uaeh.edu.mx

Federico Menendez-Conde fmclara@uaeh.edu.mx

XXX Aniversario del Centro de Investigación en Matemáticas

CIMAT
cimat@cimat.mx

En el mes de abril, el Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) celebra su trigésimo aniversario. El Centro, que forma parte del Sistema de Centros Públicos de Investigación Científica del CONACYT, inició sus actividades en 1980 en la capital de Guanajuato con un grupo de 4 investigadores comisionados por la UNAM. A lo largo de los años se ha consolidado como uno de los centros más importantes del país en las áreas de Matemáticas, Probabilidad y Estadística, y Ciencias de la Computación.

Actualmente su comunidad está conformada por 110 académicos y más de 130 estudiantes de posgrado, además de los cerca de 120 estudiantes de los programas de Licenciatura que el CIMAT ofrece bajo un convenio de colaboración con la Universidad de Guanajuato (UG). El Centro cuenta hoy también con sedes en las ciudades de Aguascalientes, Monterrey y Zacatecas para apoyar sus labores de vinculación y transferencia tecnológica.

Su planta académica incluye aproximadamente 70 investigadores, de los cuales más del 85 % pertenece al Sistema Nacional de Investigadores y más de la mitad se ubica en los niveles II y III de dicho sistema. La estructura académica consta de 3 departamentos correspondientes a Matemática Básica, Probabilidad y Estadística, y Ciencias de la Computación, dentro de los cuales pueden distinguirse los siguientes grupos de investigación: Análisis Funcional, Computación Matemática, Estadística Aplicada, Geometría Algebraica, Geometría Diferencial, Inferencia Estadística, Ingeniería de Software, Matemáticas Aplicadas, Modelación Estocástica, Sistemas Dinámicos, y Topología y Geometría Combinatoria.

La oferta educativa del CIMAT incluye programas de Licenciatura (con la UG), Maestría y Doctorado con orientaciones en Ciencias de la Computación, Matemáticas Aplicadas, Matemáticas Básicas y Probabilidad y Estadística; todos están reconocidos como programas de excelencia por el CONACYT.

El CIMAT ha implementado exitosamente trabajos de vinculación con los sectores industrial, empresarial y gubernamental en aspectos de Consultoría Estadística, Desarrollo de Software, Modelación Matemática, Capacitación y Actualización de Profesores. Se han ofrecido diversos programas especializados para capacitar personal de alto nivel, como la Especialidad en Estadística (con sede en la Unidad de Aguascalientes), la Maestría en Estadística Oficial (para el INEGI), la Especialidad y la Maestría en Ingeniería de Calidad y la Maestría en Ingeniería de Software (ahora con sede en Zacatecas).

Debido a su vigoroso programa de eventos académicos, que lo mantiene en continua actualización e inmerso en un ambiente internacional muy competitivo, una de las particularidades del Centro es su gran flujo de visitantes e intercambio académico. Este año conmemorativo no será distinto. Además de organizar una docena de talleres (tanto de investigación como de divulgación de la Ciencia), en el 2010 el Centro es anfitrión del Workshop on Low Dimensional Topology (ene), del V Congreso Internacional de Métodos Numéricos (feb), de los Pan-American Advanced Studies Institute Workshops on Applied Statistics and Probability (abril-mayo), Workshop on prior-free Mechanism Design (mayo), del Workshop on New Directions in Nonlinear Dynamics (mayo) y del CIMAT-IMA-PIMS Math Modeling in Industry Workshop (ago).

AVISOS

VIII Reunión Conjunta

Sociedad Matemática Mexicana
&
American Mathematical Society

se llevará a cabo

del 2 al 5 de junio de 2010 en
Berkeley, California, EEUU

CARTA INFORMATIVA

SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 64,
Abril de 2010

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A.C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D.F.
Tel. (55) 5747-3800 ext. 6414
smm@smm.org.mx

DISEÑO

Daniel Espinosa Pérez

IMPRESIÓN

S y G editores, SA de CV
Tel. 5617-5610
sygeditores@prodigy.net.mx
sygeditorespress@gmail.com

PORTADA

CIMAT
Guanajuato, México