CARTA INFORMATIVA

No. 66
Marzo
2013

- **Informe 2012, Sociedad Matemática Mexicana**
- **Matemáticas del Planeta Tierra, comunicado de prensa**
- **12 años de matemática aplicada, interdisciplinaria y experimental**
- **El teorema fundamental de la aritmética**

Cinvestav

FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON MODELS OF COMPLEX HIERARCHIC SYSTEMS AND NON-ARCHIMEDEAN ANALYSIS

CINVESTAV - ABACUS CENTER, MEXICO, APRIL 29th TO MAY 3rd, 2013

The conference will focus on models of complex hierarchic systems using non Archimedean mathematical techniques. We expect to gather physicists, mathematicians, and engineers around the world to discuss and advance in the area of non Archimedean models of complex hierarchic systems and the mathematics behind them.

Scientific Committee

S. Albeverio (Germany), A. Khrennikov (Sweden), A. Kochubei (Ukraine), F. Murtagh (UK), W. A. Zúñiga-Galindo (Mexico)

Organizing Committee

ABACUS Center

Topics

Non Archimedean models in cosmology, quantum systems and strings.

Computing (ultrametricity in data mining, complexity over p-adics, p-adic techniques in cryptography).

Non Archimedean models in complex systems and biology.

Non Archimedean dynamical systems.

Non Archimedean Analysis and geometry.

Web: www.math.cinvestav.mx/ICMCHS2013
E-mail: wazuniga@math.cinvestav.edu.mx

Plenary Speakers:

Vladik Avetisov (Russia).

Alain Escassut (France).

Helge Glöckner (Germany).

Hiroshi Kaneko (Japan).

Anatoly Kochubei (Ukraine).

Andrei Khrennikov (Sweden).

Fionn Murtagh (UK).

María Cristina Pérez-García* (Spain).

Enrique Reyes* (Chile).

Sergii Torba (Mexico).

Veeravalli S. Varadarajan (USA).

Alberto Verjovsky (Mexico)

Igor Volovich (Russia).

W. A. Zuñiga-Galindo (Mexico).

* To be confirmed

Supported by ABACUS, CONACyT grant EDOMEX-2011-C01-165873.

Informe 2012, Sociedad Matemática Mexicana

Luis Montejano Peimbert
Presidente

Junta Directiva Ampliada 2012 de la SMM

Vicepresidente: Judith Zubieta García

Tesorero: José Carlos Gómez Larrañaga

Secretario General: Ricardo A. Cantoral Uriza

Secretario de Actas: Luz de Teresa de Oteyza

Vocal: Gabriela Araujo Pardo

Vocal: Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Cooperación Internacional: José Antonio Seade Kuri

Informática: Miguel Ángel Pizaña

Publicaciones: Ana Irene Ramírez Galarza

Presidente OMM: José Antonio Gómez Ortega

Secretaria Administrativa: Luz María Briseño

1. Olimpiada Matemática Mexicana

De nuevo las Olimpiadas Matemáticas Mexicanas vuelven a ser orgullo y ejemplo de dedicación y profesionalismo para toda la comunidad matemática del país. Durante el año 2012 participamos en las siguientes competencias internacionales

a) Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacifico,

b) Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe,

c) Competencia Internacional de Matemáticas,

d) Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas,

e) Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Se obtuvieron la siguientes medallas:

a) 1 de Oro, 2 de Plata, 4 de Bronce y 3 Menciones Honoríficas,

b) 2 de Oro y 1 de Plata,

c) 1 de Oro, 1 de Plata, 2 de Bronce y 2 Menciones Honoríficas.

En la Olimpiada Matemática Internacional los ganadores son:

Diego Alonso Roque Montoya, Medalla de Oro,

Adán Medrano Martín del Campo, Medalla de Plata,

Jorge Garza Vargas, Medalla de Bronce,

Julio Cesar Díaz Calderón, Medalla de Bronce,

Juan Carlos Ortíz Rhoton, Mención Honorífica,

Jorge Ignacio González Cazares.

A nombre de la SMM felicitamos también a todos los que trabajan para alcanzar estos éxitos, competidores y entrenadores, no solamente en esta ocasión sino en muchas otras en las que se ha participado exitosamente, especialmente felicitamos al Presidente de la Olimpiada Matemática Mexicana, José Antonio Gómez Ortega.

2. Proyecto Editorial de la SMM

Hoy queremos en la SMM fortalecer un proyecto editorial, con la elaboración de más libros de texto y la consolidación de sus revistas: Miscelánea Matemática, Aportaciones Matemáticas y el Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.

Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana

El Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana experimentó un periodo de grandes dificultades por lo que se publicó fuera de los plazos normales durante un tiempo. Actualmente estamos prácticamente en los tiempos esperados. Hemos sacado ya el número 1 del Volumen 18 de 2012 y estamos a punto de sacar el número 2 del mismo.

Anunciamos que estamos en conversaciones con la Editorial Birkhauser, estudiando la posibilidad de que la Editorial se haga cargo de todo el proceso editorial conservando la SMM todo aquello que tenga que ver con las decisiones académicas de la revista. Agradecemos y felicitamos al Comité Editorial del Boletín de la SMM; Lucero de Teresa, Eduardo Santillan Zeron y Ernesto Pérez Chavela quienes han sido capaces en muy poco tiempo de regresarle a la revista el prestigio y profesionalidad que siempre ha tenido, en particular poniéndola otra vez al día. Hoy podemos afirmar orgullosamente que estamos ya en los tiempos esperados. Queremos felicitar también a todos aquellos que trabajan para consolidar este éxito.

Miscelánea Matemática

La Revista de la SMM, Miscelánea Matemática ha estado saliendo con una gran calidad y profesionalismo desde hace ya mucho tiempo. Se tiene contemplado un número especial de matemáticas para la Biología y las Ciencias de la Tierra. Por otro lado, a partir del mes de julio de este año está disponible en línea: `www.miscelaneamatematica.org` La página contiene artículos publicados desde 1996.

Agradecemos a todo el Comité Editorial de Miscelánea por su profesionalismo pero muy en especial a su coordinadora Ana Meda.

Libros Publicados en 2012. Aportaciones Matemáticas.

Serie de Textos ISBN 978-36-3594-5

1. No. 37 Elementos de Topología General, Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa.
2. No. 38 Cálculo, Hugo Arizmendi Peimbert, Ángel M. Carrillo, Miguel Lara Aparicio.
3. No. 39 Curso Elemental de Probabilidad y Estadística, Luis Rincón (por enviarse a la imprenta).

Serie Comunicaciones ISNB 978-36-3592-1

1. No. 45 Memorias de la SMM (2012). Editado por Marcelo Aguilar y Luis Hernández la Moneda
2. Cuadrípticos de Aportaciones Matemáticas. Actualización e Impresión.

Publicaciones Electrónicas de la SMM

La SMM tiene 4 Series de Publicaciones Electrónicas: Textos, Memorias, Divulgación y Cursos.

Este año se publicaron dos libros de la Series de Textos y un Libro de la Serie de Cursos. Coordinadores: Emilio Lluis Puebla y Carlos Renteria.

3. Cooperación Internacional

Las relaciones científicas de la SMM con otras asociaciones internacionales han sido atendidas con certidumbre durante este año:

i) International Mathematical Union

La Unión Matemática Internacional tiene clasificados a los países del mundo de acuerdo a la calidad de su matemática. México está considerado en un lugar muy bajo. Hemos solicitado la reclasificación de nuestro país para lo cual hemos presentado un proyecto avalando nuestra solicitud al resumir los logros alcanzados por nuestros matemáticos a lo largo de la historia y la potencialidad de nuestras instituciones y posgrados. Hemos también solicitado y obtenido el apoyo de otras Sociedades Científicas del mundo para apoyar nuestra empresa. Agradecemos a José Seade por su trabajo puesto en esta empresa.

ii) The Mathematical Congress of the Americas 2013

El Congreso Matemático de las Américas es después del Congreso Internacional uno de los eventos académicos más importantes del mundo matemático. El siguiente año tendrá lugar en Guanajuato del 5 al 9 de agosto. La sede la tiene el CIMAT y la SMM coparticipa en su organización.

4. Apoyos y Premios

i) Premio Sotero Prieto de la SMM

El Premio Sotero Prieto se otorga anualmente a la mejor tesis de licenciatura en matemáticas obtenida por un estudiante de alguna institución de educación superior del país.

Este año el ganador es Valente Ramírez García Luna. Se tuvieron además 4 Menciones Honoríficas; Alejandro Betancourt de la Parra, Pedro Eduardo Mercado Sandoval, Leonardo Ignacio Martínez Sandoval y Juan Salvador Garza Ledesma.

Coordinador Marcelo Aguilar.

ii) Apoyo Sophia Kovalevskaya

La SMM y la Fundación Sophia Kovalevskaya otorgan anualmente un premio o apoyo a jóvenes y talentosas matemáticas mexicanas para el desarrollo de la investigación matemática en México.

Las investigadoras y estudiantes a las que se otorgó este apoyo son:

- Dra. Hortensia Reyes Cervantes; Profesora de la BUAP, Estadística.
- Dra. Gloria López Chavez. Estudiante de Doctorado de la UNAM, Matemáticas Discretas.
- Dra. María Teresa Verónica Palacios, Profesora de la Ibero, Finanzas.

- Dra. Jania Astrid Saucedo, Profesora UANL, Investigación de Operaciones.
- Dra. Edith Lucero Ozuna. Profesora UANL. Investigación de Operaciones.

Agradecemos a Ann Hibner de la Fundación Sophia Kovalesvskaya y a Patricia Saavedra por el esfuerzo para otorgar estos apoyos.

5. Consejo de Acreditación para Programas Educativos en Matemáticas

La Junta Directiva de la SMM esta consciente de la necesidad que tienen las escuelas de matemáticas de contar con un organismo acreditador con reconocimiento en COPAES.

Las Doctoras Flor Aceff, Lilia del Riego y la Maestra Bertha Madrid en colaboración con la mayoría de las escuelas trabajaron para conseguir este reconocimiento. Les agradecemos su esfuerzo. Necesitamos continuar trabajando para obtener el registro de COPAES por lo que hemos solicitamos a los doctores Víctor Castaños y Efrén Morales se hagan cargo de este proyecto. Ellos han estado trabajando arduamente para la consecución de este importante proyecto.

6. Proyectos Elaborados

Se elaboraron proyectos para las siguientes instituciones:

- Secretaria de Educación Publica, PADES.
- Secretaria de Educación Publica, subsecretaria de Educación Media.
- Secretaria de Educación del Estado de Querétaro. USEBEQ.
- COMECYT.
- CONCYTEQ.
- ICYTDF.
- CONACYT.

Los proyectos que elaboramos son los siguientes:

1. Matemáticas y Sector productivo; Plan Estratégico en Matemáticas Aplicadas; Oficinas de transferencia tecnológica. Héctor Juárez y Jorge X. Velasco.
2. Plazas Posdoctorales Sandoval Vallarta; Un grupo de Biología Matemáticas en Querétaro. Jorge X. Velasco y Luis Montejano.
3. El Congreso Nacional de Matemáticas en Querétaro; 2012. Gabriela Araujo y Luis Montejano.
4. La Cooperación Internacional de la SMM. José Seade.
5. Difusión y Divulgación: el proyecto cultural y editorial de la SMM. Ernesto Vila y José Carlos Gómez Larrañaga.
6. El Cinnma; un proyecto piloto de regionalización de la matemática nacional. Luis Montejano y Deborah Oliveros.
7. Las Olimpiadas Matemáticas Mexicanas. José Antonio Gómez Ortega.
8. Las Matemáticas en el Sistema de Universidades Tecnológicas del País. Ricardo Cantoral.

7. Reorganización Administrativa

Hemos implementado una reorganización administrativa que facilite el funcionamiento de nuestra Sociedad y que esté acorde con su complejidad y con los requerimientos administrativos de una asociación de vanguardia. Agradecemos de manera especial el enorme trabajo desplegado por nuestra Contadora Luz María Briseño.

Entre las muchas tareas efectuadas tenemos:

- Recuperamos el RENIECYT.
- Pasamos de 6 a 37 Membresias Institucionales.
- Creamos nuevos estatutos.
- Situación Financiera, Estado de las Cuentas Bancarias.
- Situación ante el SAT.
- Contabilidad y Registros Contables.
- Reportes ante CONACYT, SEP y otros.

8. Estatutos

Creamos una comisión que estudió y propuso la actualización y modificación global de nuestros estatutos que nos permitirá estar preparados para afrontar los retos de una Sociedad científica del siglo XXI. Esta propuesta de estatutos fue dada a conocer en la Asamblea de este Congreso Nacional. Quiero agradecer a los miembros de esta comisión dirigida por Ángel Carrillo, por el profesionalismo con el que abordaron su misión. Los Nuevos Estatutos fueron votados y aprobados en la Asamblea General del 45 Congreso Nacional efectuado en la Ciudad de Querétarto.

9. 45° Congreso Nacional

Sin duda, la organización del Congreso Nacional es la actividad de la Sociedad Matemática Mexicana más importante y la que consume más tiempo y energía. Este año el Congreso Nacional se efectuó en la Ciudad de Querétaro. Tuvimos mas de 2000 asistentes registrados y hubo más de mil ponencias en todas las áreas de las matemáticas. Se le dio especial importancia a la Docencia, a la Matemática Aplicada y a la Divulgación. Hubo cientos de miembros de esta sociedad involucrados de alguna forma en la organización del Congreso por lo que agradezco el enorme esfuerzo y colaboración de la comunidad matemática del país por participar y ser parte de la organización del mismo. Por supuesto agradecemos la colaboración de las autoridades de la Universidad Autónoma de Querétaro que nos prestaron generosamente sus instalaciones durante una semana. Agradezco también a los Coordinadores Generales de Congreso; Alejandro Díaz Barriga, Víctor Ibarra y Gabriela Araujo así como a los coordinadores del Comité local; Deborah Oliveros, Carmen Sosa y Carlos Arredondo por haber organizado este exitoso Congreso Nacional.

10. Otros

Estamos buscando la manera de que la matemática se disemine a lo largo de todo el país, tal y como lo adelantamos en nuestro Plan de Trabajo, y en encontrar soluciones al grave problema de insertar a nuestros jóvenes en el sistema educativo y productivo. En ese sentido hemos trabajado y presentado varios proyectos. Hemos empezado a desarrollar un plan estratégico para que nuestra Sociedad cuente con una instancia promotora de mecanismos y acciones de vinculación, con capacidad suficiente para asesorar la gestión del conocimiento matemático, tanto en lo que se refiere a investigación científica como a desarrollo tecnológico.

Matemáticas del Planeta Tierra, comunicado de prensa

7 de diciembre de 2012

La comunidad matemática se enfrenta a los desafios planetarios

Montreal (Canadá) – 7 de diciembre de 2012 – Más de un centenar de institutos de investigación y sociedades científicas se unen en el marco de una gran iniciativa mundial: las Matemáticas del Planeta Tierra 2013 (MPT 2013). Este proyecto, que se desarrollará a lo largo del año, mostrará la contribución de las matemáticas en la búsqueda de soluciones a problemas mundiales como las catástrofes naturales (huracanes, terremotos y tsunamis), los cambios climáticos, el desarrollo sustentable y las pandemias. Los socios de la iniciativa MPT 2013 organizarán talleres, congresos científicos, conferencias públicas, actividades de sensibilización y actividades educativas para todas las edades. Cada país de una institución socia hará un lanzamiento especial para marcar el inicio de este año especial. El primer lanzamiento será el 7 de diciembre en Montreal Canadá.

La iniciativa MPT 2013 se desarrollará con el padrinazgo de la Organización de las Naciones Unidas para la educación, la ciencia y la cultura (UNESCO). “La UNESCO, afirma su directora general, Irena Bokova, apoya sin reservas esta extraordinaria colaboración de los matemáticos del mundo para hacer progresar la investigación de los retos fundamentales del planeta: esto permitirá entender mejor los desafíos mundiales, sensibilizar al público y enriquecer los programas escolares integrando el papel fundamental de las matemáticas en la búsqueda de soluciones a los problemas que acechan a nuestro planeta.”

La iniciativa MPT 2013 hará que se conozca la naturaleza interdisciplinaria de la investigación científica y el papel único que juegan las matemáticas en la búsqueda de soluciones de los grandes problemas del planeta. Esta vasta iniciativa reunirá a investigadores e investigadoras de distintos campos como la medicina, la genética, las finanzas y las matemáticas, para intentar resolver algunos de los problemas mundiales más urgentes. Las matemáticas tendrán también un papel importante para las soluciones a largo plazo, especialmente en temas como la seguridad del comercio electrónico, la previsión más precisa de las catástrofes naturales, la adaptación de los ecosistemas a los cambios y la propagación de enfermedades.

“Comparto de ahora en adelante mi sueño con tantos científicos del planeta que la iniciativa MPT 2013 ha crecido sola. Esta colaboración sin precedentes se prolongará mucho más allá del 2013”, subraya Christiane Rousseau, investigadora de MPT 2013. “Esta gran iniciativa quiere que algunas de las mentes más brillantes del planeta contribuyan para resolver los grandes problemas mundiales”, refuerza Brian Conrey, organizador principal de MPT 2013 en Estados Unidos.

Entre otros ejemplos de aplicaciones recientes a problemas mundiales, los científicos han utilizado matemáticas para mejorar estrategias de recarga de los acuíferos subterráneos; crearon un modelo mejorado de colaboración entre gobiernos e industrias para reducir la contaminación; modelar la transmisión de enfermedades infecciosas para desarrollar estrategias con la finalidad de erradicar o limitar esas enfermedades y mejorar la comprensión teórica de los virus y de los medicamentos necesarios para combatirlos. Según Mary Lou Zeeman, “la modelación matemática nos ayuda a combatir las enfermedades infecciosas. Nos permite, por ejemplo, evaluar el porcentaje de la población que debe ser vacunado para erradicar una enfermedad o medir el impacto de otros factores como la educación.”

“El desarrollo sustentable requiere de una mejor comprensión de las interacciones complejas entre un gran número de sistemas: clima, economía, progreso tecnológico, geología, ecología, ciencia espacial, regulación demográfica, seguridad, política mundial y psicología colectiva explica Doyne Farmer, director del programa Oxford Martin sobre complejidad. Para asegurar la supervivencia del planeta hace falta una visión clara de nuestro futuro y poner a la filosofía en contacto directo con la ciencia. En tanto que científicos nuestro trabajo consiste en comprender las causas y los efectos, haciendo previsiones y cuantificando lo mejor posible las grandes incertidumbres de esas previsiones. Pero necesitamos que los matemáticos trabajen con los físicos, los ecologistas, los economistas, etc. para estar seguros de utilizar el modelo correcto.”

MPT 2013 también puede tener efecto en los cuidados de la salud, mejorando nuestra comprensión del control de pandemias, y contribuir a la economía verde favoreciendo la concepción de materiales de alto rendimiento para las pilas y celdas solares.

Las matemáticas son una elección profesional cada vez más popular entre las personas que aspiran a encontrar soluciones para los problemas de nuestro planeta.

Informes sobre la iniciativa MPT 2013

La iniciativa Matemáticas del Planeta Tierra 2013 reúne a más de un centenar de sociedades científicas, institutos de investigación y organismos en todo el mundo. Este proyecto tiene la misión de alentar la investigación sobre desafíos planetarios fundamentales buscando soluciones, incitar al profesorado de todos los niveles para que den a conocer los problemas que tiene la Tierra, sensibilizar a la población sobre el papel esencial de las matemáticas en la solución de problemas planetarios e incitar a los jóvenes que se interesen en el desarrollo sustentable y en los desafíos mundiales a considerar una carrera estimulante en matemáticas. La iniciativa MPT2013 se desarrollará cobijada por la Organización de las Naciones Unidas para la educación, la ciencia y la cultura (UNESCO).

Para más información ver
`http://www.mpe2013.org/newsroom`

Traducción a español del texto en francés, Luz de Teresa `deteresa@matem.unam.mx`, por la Sociedad Matemática Mexicana.

Décimo Coloquio Nacional. Teoría de Códigos, Criptografía y Áreas Relacionadas

Septiembre 10, 11, 12 y 13 de 2013
Casa de la Primera Imprenta de América Latina, Centro Histórico de la Cd. de México

El Comité Organizador hace una cordial invitación a las personas que deseen participar con una ponencia (25-30 minutos) a que envíen el título y resumen de su plática (máximo una cuartilla) en formato LaTeX o ASCII al correo ngh@xanum.uam.mx. La fecha límite para enviar esta información es el 21 de julio de 2011. El Comité Organizador evaluará los resúmenes presentados y dará a conocer los trabajos aceptados a más tardar el 5 de agosto del presente año. Se contará con un número limitado de becas de hospedaje para estudiantes.

COMITÉ ORGANIZADOR

José Noé Gutiérrez Herrera (Dpto. de Matemáticas, UAM-I)
Rubén Vázquez Medina (SEPI-ESIME-Culhuacan, IPN)
Jesús Carrillo Pacheco (Academia de Matemáticas, UACM-SLT)
Horacio Tapia Recillas (Dpto. de Matemáticas, UAM-I)
Carlos Alberto López Andrade (FCFM-BUAP)
Adolfo Torres Cházaro (Dpto. de Matemáticas, UAM-I)

12 años de matemática aplicada, interdisciplinaria y experimental

Elizabeth Ruiz y Ricardo Femat
División de Matemáticas Aplicadas, IPICyT

El Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica A.C. (IPICyT) festejó en 2012 su duodécimo aniversario, se constituyó el 24 de noviembre del año 2000 en la Ciudad de San Luis Potosí y pertenece al Sistema de Centros Públicos de Investigación del CONACYT. Desde su origen, por concepto de su Director fundador, José Luis Morán López, el IPICyT se ha compuesto por 5 divisiones académicas de vocación interdisciplinaria: Biología Molecular, Ciencias Ambientales, Geociencias Aplicadas, Matemáticas Aplicadas y Materiales Avanzados. Continuidad sucedida y consolidada por David Ríos Jara, actual responsable de las directrices generales del IPICyT.

La División de Matemáticas Aplicadas (DMAp), otrora Departamento de Matemáticas Aplicadas y Sistemas Computacionales, hasta 2005 sostenía sus labores académicas con 7 investigadores y 5 técnicos fomentando 3 líneas de investigación: Biomatemáticas, Electrónica de Potencia y Sistemas Dinámicos. Respecto de la formación de recursos humanos, desde 2002 y a la fecha, se ofrece el posgrado en Control y Sistemas Dinámicos. Con una orientación de aplicación matemática, fundada de origen para establecerse de facto, se planearon laboratorios donde las líneas de investigación cultivadas pudieran experimentar sobre las teorías en estudio. Para 2005, en la DMAp existían 3 laboratorios, cada uno con tan sólo el 50 % del equipo necesario para operar. Ahora, de sus investigadores, el 46 % es reconocido con Nivel 2 y 3 en el S. N. I. y la totalidad son investigadores activos; además de contar con 3 investigadores como editores asociados en revistas internacionales indizadas en ISI del SCI.

Actualmente la DMAp, tiene una planta académica de 12 investigadores, 4 técnicos con posición permanente, 7 para proyectos de vinculación y alrededor 6 posdoctorantes de manera constante, todos trabajando en las mismas líneas de investigación de inicio. En total, se han terminado 30 tesis de maestría y 12 de doctorado. En cuanto a infraestructura existen 5 laboratorios de investigación equipados: (i) Electrónica de Potencia, (ii) Calidad de la Energía, (iii) Biodinámica y Reacciones Químicas, (iv) Redes Complejas y (v) Sistemas Híbridos y además tenemos 3 laboratorios de uso divisional, para desarrollo y construcción de prototipos. Se está proyectando un laboratorio adicional: Biodinámica Celular. La DMAp está participando en la vinculación de una forma creciente, ya que se llevan a cabo proyectos con el sector industrial que significan más de 29 millones de pesos: sólo de 2009 a 2012, y por convocatorias públicas ha atraído 20 proyectos por 8 millones de pesos y 8 proyectos con participación internacional (bilaterales). De los proyectos con el sector industrial destaca el consorcio formado por la DMAp del IPICyT y la empresa CANEL's, de capital completamente mexicano dedicada a la confitería, propiciando el desarrollo regional y generación de empleos en la ciudad de San Luis Potosí. De los proyectos internacionales, destaca el consorcio BITA formado con INRA, un centro del grupo INRIA-CNRS francés, y la UCL en Bélgica para tratamiento de aguas residuales, consorcio donde también participan la UNAM y la Universidad de Guadalajara. Y además el consorcio SPECTRE, con CIATEJ-UTV-IPICYT, en México, y la empresa ONDALYS como la Université Montpellier II, en Francia.

En términos de actividades académicas; la DMAp ha concretado convenios de movilidad para los estudiantes así como de colaboración científica con instituciones nacionales e internacionales, se realizan alrededor de 5 talleres y eventos por año donde participan estudiantes de instituciones externas, además de haber organizado los congresos internacionales IFAC-CHAOS 2012 y PHYSCON 2013. Otro producto de relevancia es la publicación de 4 libros de investigación en editoriales mundiales y dos más en preparación. Y, como un estándar, en el periodo 2001 a 2005 se publicaron 55 artículos en revistas científicas indizadas en SCI mientras que en el correspondiente de 2006 a 2012 han sido 106; dando un promedio anual cercano a 15 artículos desde sus inicios. Notas periodísticas, entrevistas en radio y televisión son cotidianas: convicción por la divulgación a la sociedad de la labor científica como medio de impacto y difusión.

El principal objetivo de la División de Matemáticas Aplicadas es el posicionamiento nacional e internacional en las líneas de investigación, generación de conocimiento y continuar apoyando en el mejor entendimiento y posible resolución de los problemas de: diabetes mellitus, calidad en uso de energía eléctrica, tratamiento de aguas residuales, entre otros. Los retos, incrementar las capacidades de generación y aplicación del conocimiento, impulsar a jóvenes para dar continuidad al cuerpo mexicano de investigadores en la matemática aplicada, interdisciplinaria y experimental.

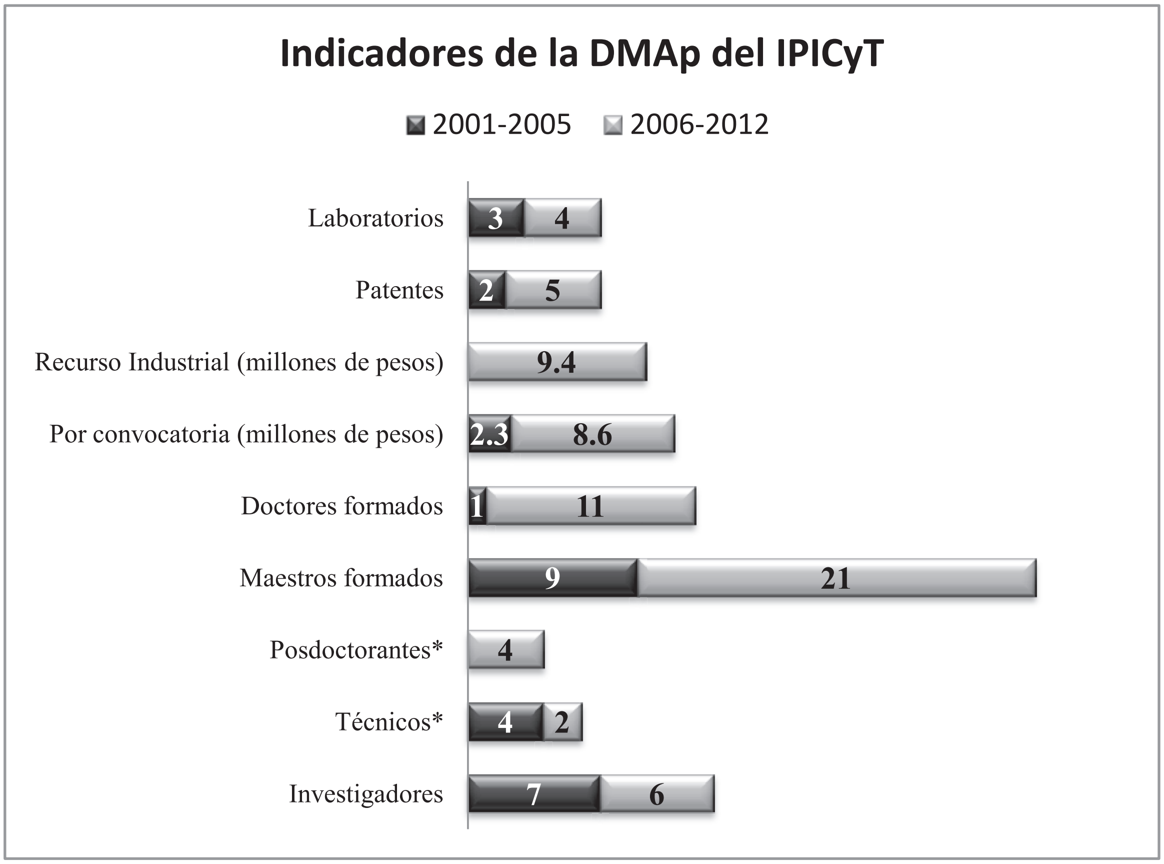


Figura 1: Los números por lustro de la DMAp del IPICyT. *Los técnicos académicos con posición fija son 4 y el resto, al igual que los posdoctorantes, fluctúa respecto de los fondos logrados, el número para el periodo 2006-2012 es promedio anual.

El teorema fundamental de la aritmética

Myriam Rosalía Maldonado Ramírez
Departamento de Matemáticas,
ESFM-IPN
rosalia@esfm.ipn.mx

Martha Rzedowski Calderón
Departamento de Control Automático
CINVESTAV-IPN
mrzedowski@ctrl.cinvestav.mx

1. Introducción

Bertrand Russell expresó su sentir acerca de la belleza matemática con las siguientes palabras: “Las matemáticas, vistas adecuadamente, poseen no sólo verdad, sino belleza suprema, una belleza fría y austera, como la de la escultura, sin apelar a ninguna parte de nuestra naturaleza más débil, sin los magníficos atavíos de la pintura o la música, aun sublimemente pura, y capaz de una severa perfección tal como solamente el arte más grande puede mostrar. El espíritu verdadero del placer, la exaltación, el sentido de ser más que el hombre, que es la medida de la más alta excelencia, debe ser encontrado en las matemáticas tan seguramente como en la poesía” [10].

Paul Erdös expresó su punto de vista sobre la inefabilidad de las matemáticas cuando dijo: “¿Por qué son bellos los números? Es como preguntar por qué la Novena Sinfonía de Beethoven es bella. Si usted no puede ver por qué, nadie se lo puede decir. Yo sé que los números son bellos. Si ellos no lo son, nada lo es” [4, p. ix].

Uno de los más bellos resultados matemáticos es, en nuestra opinión, el teorema fundamental de la aritmética, el cual nos dice:

> *Todo número entero mayor que uno se puede escribir de manera única como producto de números primos.*

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 6936 &= 2^3 \times 3 \times 17^2 \\ 400 &= 2^4 \times 5^2 \\ 2 &= 2. \end{aligned}$$

En este trabajo exploramos algunas ideas alrededor de este resultado. Presentamos algunos conceptos y resultados acerca de divisibilidad así como algunos antecedentes históricos. Damos una primera definición de número primo, concepto que más adelante es precisado y comparado con los de elemento irreducible y elemento primo en un contexto más general. En el caso de los números enteros estos conceptos coinciden gracias al lema de Euclides. Presentamos una demostración del teorema fundamental de la aritmética, la parte de existencia de la factorización se prueba por inducción y la parte de unicidad se auxilia del lema de Euclides.

Un dominio entero es un conjunto con dos operaciones que satisfacen algunas de las propiedades que tienen los enteros, destacando entre ellas que el producto de elementos diferentes de cero es diferente de cero. Un dominio de factorización única es un dominio entero para el cual se cumple el teorema fundamental de la aritmética. Damos varios ejemplos de dominios enteros, algunos que son de factorización única, otros para los que falla la existencia de la factorización y algunos que, como $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, aunque admiten factorización, ésta no es única. Finalmente, presentamos el teorema fundamental de la teoría de ideales, que es una versión generalizada del teorema fundamental de la aritmética, mediante el cual se recupera en algunos casos, en particular el de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, la factorización única, ya no para enteros, sino para ideales.

2. Antecedentes

Dados a y b números enteros decimos que a **divide** a b o que a es un **divisor** de b y escribimos $a \mid b$ si existe un entero q tal que $b = aq$. En caso contrario decimos que a **no divide** a b y escribimos $a \nmid b$. Por ejemplo:

$$2 \mid 10, \text{ pues } 10 = 2 \times 5,$$

$$3 \nmid 10, \text{ pues no existe entero } q \text{ tal que } 10 = 3 \times q.$$

Se tiene que si a y b son números naturales y $a \mid b$, entonces $a \leq b$.

Comúnmente se entiende por número **primo** a un número entero mayor que 1 tal que sus únicos divisores positivos son 1 y él mismo. Diremos que un número entero mayor que 1 es **compuesto** si no es primo. Por ejemplo:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ son los primeros 12 números primos,

mientras que $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21$ son los primeros 12 números compuestos.

Observamos que el número 1 no es ni primo ni compuesto.

La **criba de Eratóstenes** (ca. 276 a. C. - ca. 195 a. C.) es un algoritmo para obtener los números primos menores o iguales que un número natural dado n. Se colocan los números que van de 1 hasta n en un arreglo rectangular. Se elimina 1 pues no es primo. Como el número 2 es primo, permanece y tachamos a los siguientes múltiplos de 2 que están en el arreglo. Se toma el primer número después de 2 que no ha sido eliminado, el cual es 3, que es primo y por tanto permanece y eliminamos de la lista a sus siguientes múltiplos, y así sucesivamente. El proceso termina cuando el cuadrado del último número confirmado como primo es mayor que n. Los números que permanecen en el arreglo sin tachar son los primos.

Un **máximo común divisor** d de los enteros a y b, no ambos cero, es un divisor común positivo de a y b tal que

$$c \mid a \text{ y } c \mid b \implies c \mid d.$$

Se puede verificar que el máximo común divisor d de los enteros a y b, no ambos cero, existe y es único. Más aún el máximo común divisor de a y b se puede escribir como combinación lineal de ellos, esto es,

$$d = am + bn,$$

para algunos $m, n \in \mathbb{Z}$. Usaremos la notación $d = (a, b)$. Decimos que a y b son **primos relativos** si $(a, b) = 1$.

A continuación se presenta la factorización como producto de potencias de números primos y la obtención del máximo común divisor de 2436 y 5850.

2436	2
1218	2
609	3
203	7
29	29
1	

5850	2
2925	3
975	3
325	3
65	5
13	13
1	.

Entonces

$$2436 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1 \times 29^1,$$

$$5850 = 2^1 \times 3^2 \times 5^2 \times 13^1.$$

Por lo tanto

$$(2436, 5850) = 2^1 \times 3^1 = 6.$$

Es más fácil, aunque menos elegante en nuestra opinión, demostrar, usando argumentos de factorización única, que demostrar, utilizando argumentos de divisibilidad básica, enunciados como:

1. Si $a^n \mid b^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \mid b$.
2. Si $(a, b) = 1$, $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $ab \mid c$.

Por ejemplo, para demostrar la segunda afirmación, usando el teorema fundamental de la aritmética, expresamos

$$\begin{aligned} a &= p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \\ b &= q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_t^{\beta_t}, \end{aligned}$$

donde p_i y q_j son primos distintos, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ para todo i y para todo j ya que a y b son primos relativos. Como $a \mid c$ y $b \mid c$, en la factorización de c como producto de primos, aparecen $p_i^{\alpha_i}$ y $q_j^{\beta_j}$ para todo i y para todo j. Puesto que $p_i \neq q_j$, se tiene que $ab \mid c$.

Mientras que utilizando argumentos de divisibilidad, tenemos que como $a \mid c$ y $b \mid c$, existen enteros a_1 y b_1 tales que $c = aa_1$ y $c = bb_1$. Puesto que a y b son primos relativos, existen enteros m y n que satisfacen $1 = am + bn$. Entonces

$$\begin{aligned} c = c \cdot 1 = c(am + bn) &= cam + cbn \\ &= bb_1am + aa_1bn = ab(b_1m + a_1n). \end{aligned}$$

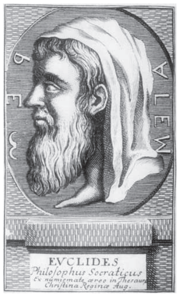
Por lo tanto $ab \mid c$.

El papiro matemático Rhind contiene una tabla de fracciones del tipo $\frac{2}{n}$. El texto reporta 51 números racionales convertidos a una serie de fracciones unitarias (recíprocos de números naturales). El documento fue escrito aproximadamente en 1650 a.C. por el escriba egipcio **Ahmes**, algunas partes fueron copiadas de un texto perdido anterior [12].

$$\begin{aligned} \frac{2}{95} = \frac{2}{95} \times \frac{12}{12} = \frac{24}{1140} &= \frac{19+3+2}{1140} \\ &= \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}. \end{aligned}$$

Obsérvese que el denominador 1140 se factoriza como $2^2 \times$

$3 \times 5 \times 19$ y que el numerador se expresa como suma de factores del denominador, de donde la fracción se expresa como suma de los recíprocos de $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $380 = 2^2 \times 5 \times 19$ y $570 = 2 \times 3 \times 5 \times 19$.



En el siglo III antes de Cristo, Euclides en su obra Los elementos no enuncia el teorema fundamental de la aritmética como lo hemos hecho, no obstante éste se sigue de las proposiciones 30 y 31 del libro VII de su trabajo [5]. La proposición 30 conocida como **lema de Euclides**, establece:

$$p \text{ primo y } p \mid ab \implies p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

En efecto, si $p \mid a$, terminamos. Si no, $(p, a) = 1$, luego hay una combinación lineal $1 = pm + an$, por tanto $b = pbm + abn$. Como $p \mid pbm$ y $p \mid abn$, concluimos $p \mid b$.

Cabe mencionar que esta demostración no es la que aparece en Los elementos.

Por su parte, Kamāl al-Dīn al Fārisī (ca. 1260 d. C. - ca. 1320 d. C.) probó la existencia de una descomposición en factores primos y dio todas las herramientas para probar la parte de unicidad del teorema fundamental de la aritmética, aunque no lo enunció como tal, ya que su objetivo era determinar todos los divisores de un número dado [1].

En 1689 Jean Prestet [9, libro VI] estableció varios resultados relacionados con el teorema fundamental de la aritmética al determinar explícitamente la relación entre cualquier factorización de un número dado en números primos y todos sus divisores posibles. Prestet no enunció ni la existencia ni la unicidad de la factorización en primos.

Leonard Euler (1707 - 1783) enunció la parte de la existencia sin probarla propiamente y respecto a la parte de la unicidad, como sus antecesores, sólo se interesó en encontrar todos los divisores de un número dado. Más tarde Legendre (1752-1833) probó la parte de existencia y supuso la unicidad cuando enlistó los factores de un número dado, pero tampoco enunció el teorema fundamental de la aritmética como tal.

El primer enunciado claro del teorema fundamental de la aritmética fue dado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en el apartado 16 de la segunda sección de su obra Disquisitiones Arithmeticae, aunque no da detalle para probar la parte de la existencia, pues dice que resulta de consideraciones elementales [6].

3. Demostración

A continuación presentamos una demostración del teorema fundamental de la aritmética:

Teorema. *Todo número entero mayor que uno se puede escribir de manera única como producto de números primos.*

Demostración. **Existencia.** Procederemos por inducción sobre n.

Para $n = 2$ se tiene el resultado pues 2 siendo primo, es producto (con un factor) de primos.

Sea n un número natural mayor que 2. Supongamos el resultado cierto para naturales mayores que 1 y menores que n y probémoslo para n. Si n es primo, n se escribe como producto (con un factor) de primos. Si n no es primo, entonces n es compuesto y se escribe como producto de dos naturales a y b tales que $1 < a, b < n$. Por hipótesis de inducción, a y b se escriben como producto de primos, luego n se escribe como producto de primos.

Unicidad. Supongamos que n es un número natural con descomposiciones

$$n = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_l,$$

donde $1 \le k \le l$ y los factores en ambas descomposiciones son números primos que están ordenados de manera creciente. Hemos de probar que $k = l$ y que $p_i = q_i$, para $1 \le i \le k$. Como $p_1 \mid n$, p_1 divide al producto $q_1 \cdots q_l$, y por el lema de Euclides $p_1 \mid q_i$ para algún i. Puesto que ambos p_1 y q_i son primos, $p_1 = q_i \ge q_1$. Análogamente, tenemos $q_1 = p_j \ge p_1$, para algún j. Se sigue que $p_1 = q_1$. Cancelando estos factores obtenemos

$$p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l.$$

Repetimos el procedimiento anterior y obtenemos $p_i = q_i$ para $1 \le i \le k$. Si acaso $k < l$, cancelando estos factores obtendríamos

$$1 = q_{k+1} \cdots q_l,$$

lo cual es una contradicción. Luego $k = l$, de donde se sigue la unicidad de la factorización. □

No dejamos de observar que las demostraciones conocidas de la parte de existencia del teorema fundamental de la aritmética se apoyan en la estructura multiplicativa de los números enteros y en el principio de inducción matemática o en sus equivalentes, el principio del buen orden y el método del descenso infinito; mientras que las demostraciones conocidas de la parte de unicidad de alguna u otra manera requieren, además de la estructura multiplicativa, la estructura aditiva de los enteros [2, capítulo I]. Por ejemplo, en la demostración de unicidad que presentamos anteriormente, se utiliza el lema de Euclides, en cuya prueba usamos que como a y b son primos relativos, existen enteros m y n que satisfacen $1 = am + bn$.

4. Irreducibles y primos

Al conjunto de los números enteros lo denotaremos por $\mathbb{Z}$.

Este conjunto está dotado de dos operaciones binarias. La adición satisface las siguientes propiedades:

A.1. Asociativa: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $(a+b)+c = a+(b+c)$.

A.2. Conmutativa: Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a+b = b+a$.

A.3. Neutro aditivo: Existe un único elemento en $\mathbb{Z}$, denotado por 0 tal que $a+0 = 0+a = a$.

A.4. Inversos aditivos: Dado $a \in \mathbb{Z}$, existe un único elemento en $\mathbb{Z}$, denotado por $-a$ tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

La multiplicación satisface:

A.5. Asociativa: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $(ab)c = a(bc)$.

A.6. Conmutativa: Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $ab = ba$.

A.7. Identidad: Existe un único elemento en $\mathbb{Z}$, diferente de 0, denotado por 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

La adición y la multiplicación se relacionan con la propiedad:

A. 8. Distributiva: Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $a(b+c) = ab+ac$.

Un conjunto dotado con dos operaciones que satisfacen los axiomas anteriores es llamado **anillo conmutativo con identidad**. Así pues, $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con identidad.

Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un elemento $a \in A$ es una **unidad** si existe un único elemento en A, denotado por a^{-1} tal que

$$aa^{-1} = 1.$$

Si $a, b \in A$, decimos que a y b son **asociados** si existe una unidad u en A tal que

$$au = b.$$

Las unidades de $\mathbb{Z}$ son 1 y -1. Por lo que, por ejemplo, 2 y -2 son asociados en $\mathbb{Z}$.

Además de los axiomas anteriores, en $\mathbb{Z}$ se cumple:

A. 9. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, con a y b diferentes de 0, tenemos ab es diferente de 0.

Un anillo conmutativo con identidad en el cual se cumple el axioma 9 se llamará un **dominio entero**. Por lo tanto $\mathbb{Z}$ es un dominio entero.

Sea D un dominio entero. Un elemento diferente de cero y que no es una unidad r de D es **elemento irreducible** si

$$r = ab \implies a \text{ es una unidad o } b \text{ es una unidad .}$$

Un elemento diferente de cero y que no es una unidad p de D es **elemento primo** si

$$p \mid ab \implies p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Los conceptos de elemento irreducible y elemento primo no coinciden. De hecho, siempre se cumple:

Si p es elemento primo, entonces p es elemento irreducible.

Sin embargo, el recíproco no siempre se tiene. Por ejemplo, el elemento 2 del dominio entero $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es un elemento irreducible, pero no es un elemento primo, como se verá más adelante.

Observemos que el concepto común de número primo corresponde al de elemento irreducible (positivo) del dominio entero $\mathbb{Z}$ y no al de elemento primo de $\mathbb{Z}$. A final de cuentas esto no tiene demasiada importancia ya que

> *en el dominio entero $\mathbb{Z}$, p es elemento irreducible si y sólo si p es elemento primo;*

esto se debe a que el lema de Euclides nos dice, en otras palabras, que

> *en el dominio entero $\mathbb{Z}$, si p es elemento irreducible, entonces p es elemento primo.*

Más precisamente, un dominio entero D satisface la unicidad de la factorización (esto es, si un elemento de D se factoriza como un producto finito de irreducibles, entonces esta factorización es única, salvo orden y asociados) si y solamente si en D se cumple el lema de Euclides (con lo cual queremos decir que todo elemento irreducible de D es elemento primo).

5. Dominios de factorización única

Un dominio entero D es un **dominio de factorización única** si todo elemento de D diferente de cero y que no es una unidad se puede expresar de manera única como producto de elementos irreducibles, salvo orden y asociados.

Como un primer ejemplo, el teorema fundamental de la aritmética nos dice que el dominio entero $\mathbb{Z}$ es un dominio de factorización única. Respecto a la unicidad de la factorización, hacemos notar que $10 = 2 \times 5 = 5 \times 2 = (-2) \times (-5)$, son esencialmente la misma factorización de 10.

El anillo de **enteros gaussianos** $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}[i]\}$ también es un dominio de factorización única, sus unidades son 1, -1, i y $-i$. Los elementos irreducibles de $\mathbb{Z}[i]$ son $1+i$, los números primos de la forma $4k+3$ y los elementos de la forma $a+bi$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a^2+b^2 = p$ con p un número primo de la forma $p = 4k+1$ y todos sus asociados [11, capítulo 3]. Por ejemplo, tenemos las siguientes factorizaciones únicas como productos de elementos irreducibles:

$$\begin{aligned} 2 &= -i(1+i)^2 \\ 5 &= (1+2i)(1-2i) \\ 3 &= 3 \\ 6 &= -i(1+i)^2 3 \\ -4+3i &= i(2+i)^2. \end{aligned}$$

El anillo $k[x]$ de **polinomios en una variable con coeficientes en un campo** k, es un dominio de factorización única, sus unidades son los polinomios constantes diferentes de cero. Los elementos irreducibles son precisamente los polinomios irreducibles. Observamos que todos los polinomios de grado uno son irreducibles. Sin embargo, pudieran no ser los únicos. Presentamos ejemplos de factorizaciones únicas como productos de irreducibles:

$x-1$	es irreducible en $k[x]$
$x^2-1=(x-1)(x+1)$	es la factorización en irreducibles en $k[x]$
x^2+1	es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$
$x^2+1=(x-i)(x+i)$	es la factorización en irreducibles en $\mathbb{C}[x]$.

A continuación damos dos ejemplos de dominios enteros en los que no existe la factorización como producto de irreducibles:

1. Sea Δ el anillo de todos los enteros algebraicos (números complejos que son raíces de polinomios mónicos con coeficientes en $\mathbb{Z}$). Tenemos que en Δ **no hay irreducibles**, ya que para $\alpha \in \Delta$, α diferente de cero y que no es una unidad, tenemos que $\alpha = \sqrt{\alpha} \times \sqrt{\alpha}$.

2. Consideremos ahora $R = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$, el anillo de polinomios en una variable con coeficientes racionales cuyo término constante es entero. Tenemos que las unidades en R son 1 y -1. Los elementos irreducibles en este anillo son $\pm p$, donde p es un número primo cualquiera, y los polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$ que tienen término constante ± 1. El elemento x de R **no se puede escribir como producto de irreducibles**. En particular x no es irreducible, de hecho $x = 2 \times \frac{x}{2}$, donde 2 es irreducible, pero $\frac{x}{2}$ no lo es, ni se puede escribir como producto de irreducibles. Así pues, en R no tenemos la existencia de la factorización como producto finito de elementos irreducibles para todos los elementos de R diferentes de cero y que no son unidades, sin embargo, los que sí se pueden factorizar, como por ejemplo $5(1+x^2)$, se factorizan de manera única [3, p. 306].

En el anillo de enteros (el anillo que juega el papel de $\mathbb{Z}$) de un **campo numérico** (extensión finita del campo de los números racionales) se tiene existencia de la factorización como producto de elementos irreducibles, pero en general **no hay unicidad de dicha factorización**.

Como ejemplos de campos numéricos, tenemos a los campos cuadráticos. Un **campo cuadrático** es una extensión de grado 2 de $\mathbb{Q}$. Si K es un campo cuadrático, entonces K es de la forma $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donde d es un número entero libre de cuadrado. Si d es positivo, diremos que K es un campo cuadrático real, mientras que si d es negativo, diremos que K es un campo cuadrático imaginario.

Por ejemplo, el anillo de enteros $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ del campo cuadrático imaginario $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ no es un dominio de factorización única. Tenemos que las unidades son 1 y -1. Para $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, con $\alpha = a + b\sqrt{-5}$, definimos la **norma** de α, denotada por $\mathcal{N}(\alpha)$, como

$$\mathcal{N}(\alpha) = a^2 + 5b^2.$$

Esta norma satisface que

1. $\mathcal{N}(\alpha) \geq 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
2. $\mathcal{N}(\alpha\beta) = \mathcal{N}(\alpha)\mathcal{N}(\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
3. $\mathcal{N}(\alpha) = 1$ si y sólo si $\alpha \in \{-1, 1\}$.

El elemento $1 - \sqrt{-5}$ es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, pues si $1 - \sqrt{-5} = \alpha\beta$, entonces $6 = \mathcal{N}(1 - \sqrt{-5}) = \mathcal{N}(\alpha\beta) = \mathcal{N}(\alpha)\mathcal{N}(\beta)$, luego $\mathcal{N}(\alpha) \in \{1, 2, 3, 6\}$. Si $\mathcal{N}(\alpha) = 2$ y $\alpha = a + b\sqrt{-5}$, tendríamos $a^2 + 5b^2 = 2$, lo cual no puede ser en $\mathbb{Z}$, lo mismo pasaría si $\mathcal{N}(\alpha) = 3$; si $\mathcal{N}(\alpha) = 6$, entonces $\mathcal{N}(\beta) = 1$, por lo tanto $\mathcal{N}(\alpha) = 1$ o $\mathcal{N}(\beta) = 1$, así que α es una unidad o β lo es, por lo que $1 - \sqrt{-5}$ es irreducible. Análogamente $2, 3$ y $1 + \sqrt{-5}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, pues $\mathcal{N}(1 + \sqrt{-5}) = 6$, $\mathcal{N}(2) = 4$ y $\mathcal{N}(3) = 9$. Además $2, 3, 1 - \sqrt{-5}$ y $1 + \sqrt{-5}$ no son asociados. Observamos que

$$(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 1 - (-5) = 6 = 2 \times 3.$$

Luego 6 admite dos factorizaciones distintas como producto de irreducibles.

Por lo tanto en este anillo, 2 es elemento irreducible pero no es elemento primo, pues $2 \mid (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, pero $2 \nmid 1 + \sqrt{-5}$ y $2 \nmid 1 - \sqrt{-5}$, ya que si $2 \mid 1 + \sqrt{-5}$, tendríamos que $1 + \sqrt{-5} = 2\gamma$, luego $6 = \mathcal{N}(1 + \sqrt{-5}) = \mathcal{N}(2\gamma) = \mathcal{N}(2)\mathcal{N}(\gamma) = 4\mathcal{N}(\gamma)$, por lo que $4 \mid 6$, lo cual no puede ser en $\mathbb{Z}$.

Hacemos notar que hay precisamente 9 campos cuadráticos imaginarios, cuyo anillo de enteros es un dominio de factorización única, estos son $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, con $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67$ y -163. En contraste tenemos la siguiente **conjetura de Gauss** [11, p.177]:

> *Hay una infinidad de campos cuadráticos reales cuyo anillo de enteros es un dominio de factorización única.*

El anillo de enteros $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$ del campo ciclotómico $\mathbb{Q}(\zeta_{23})$ tampoco es dominio de factorización única. Esto está vinculado con el error en la demostración de Lamé del último teorema de Fermat en 1847 [8, p. 5].

6. Factorización única de ideales

Sea A un anillo conmutativo con identidad. Un **ideal** de A es un subconjunto no vacío I de A que satisface:

1. Cerradura: Si $a, b \in I$, entonces $a + b \in I$.

2. Absorción: Si $a \in I$ y $r \in A$, entonces $ra \in I$.

El **ideal generado por** $a \in A$, denotado por (a), es el conjunto de elementos en A de la forma ra con $r \in A$. Si $a, b \in A$, el **ideal generado por** a **y** b, denotado (a, b), consta de los elementos en A de la forma $ra + sb$ con $r, s \in A$. Los ideales pueden sumarse y multiplicarse [3, p. 247], el neutro aditivo es $(0) = \{0\}$ y la identidad multiplicativa es $(1) = A$. Estas operaciones satisfacen todos los axiomas que definen un anillo conmutativo con identidad, excepto uno, ya que no hay inversos aditivos para los ideales distintos de (0) [3, p. 250]. Un tipo especial de ideales son los ideales primos. Un ideal $\mathfrak{p}$ es un **ideal primo** si

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \text{ o } b \in \mathfrak{p}.$$

Aunque en los anillos de enteros de los campos numéricos no necesariamente se tiene unicidad en la factorización como producto de irreducibles, tenemos en su lugar el **teorema fundamental de la teoría de ideales**, que nos dice:

> *En el anillo de enteros de un campo numérico, todo ideal diferente de* (0) *y de* (1) *se puede escribir de manera única (salvo el orden) como producto de ideales primos.*

Los **anillos de Dedekind** son cierta clase de dominios enteros, entre los cuales se encuentran los anillos de enteros de los campos numéricos [7, teorema 14]. El teorema fundamental de la teoría de ideales se cumple para anillos de Dedekind [7, teorema 16].

Finalmente, retomemos el ejemplo presentado anteriormente en el que se factoriza a 6 en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ como producto de irreducibles [11, sección 5.5]. Se puede probar que los siguientes ideales son ideales primos:

$$\mathfrak{p} = (2, 1+\sqrt{-5}) = (2, 1-\sqrt{-5}),\ \mathfrak{q}_1 = (3, 1+\sqrt{-5}) \text{ y } \mathfrak{q}_2 = (3, 1-\sqrt{-5}).$$

Tenemos las siguientes factorizaciones de ideales:

$$(2) = \mathfrak{p}^2,\ (3) = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2,\ (1+\sqrt{-5}) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 \text{ y } (1-\sqrt{-5}) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2.$$

Por lo tanto, "recuperamos" la unicidad de la factorización del ideal (6), ahora como producto de ideales primos:

$$(6) = (2)(3) = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}\mathfrak{q}_2 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}).$$

Bibliografía

1. A.G. Agargün, E.M. Özkan, *A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic.* Historia Mathematica **28** (2001) 207-214.

2. H. Davenport, "The higher arithmetic". *Hutchinson House*, 1952.

3. D.S. Dummit, R.M. Foote, "Abstract Algebra", Third Edition, *John Wiley and Sons*, 2004.

4. M.J. Erickson, "Beautiful Mathematics". *MAA spectrum series*, 2011.

5. Euclides, "The thirteen books of Euclid's Elements", translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Second Edition, *Dover*, 1956.

6. C.F. Gauss, "Disquisitiones Arithmeticae", traducción al español hecha por H. Barrantes Campos, M. Josephy y A. Ruiz Zúñiga, *Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Santa Fe de Bogotá, D.C., 1995.

7. D.A. Marcus, "Number Fields", Universitext, *Springer-Verlag*, 1977.

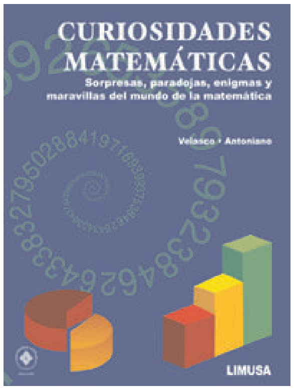
8. J.S. Milne, "Algebraic Number Theory", notes. http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ANT.pdf

9. J. Prestet, "Nouveaux elemens de mathématiques",*Chez André Pralard*, 1689.

10. B. Russell, "The Study of Mathematics", Mysticism and Logic: And Other Essays. *Longman*, 1919. http://www.readbookonline.net/readOnLine/22896/

11. S.H. Weintraub, "Factorization: unique and otherwise", *CMS Treatises in mathematics*, 2008.

12. http://en.wikipedia.org/wiki/RMP_2/n_table



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

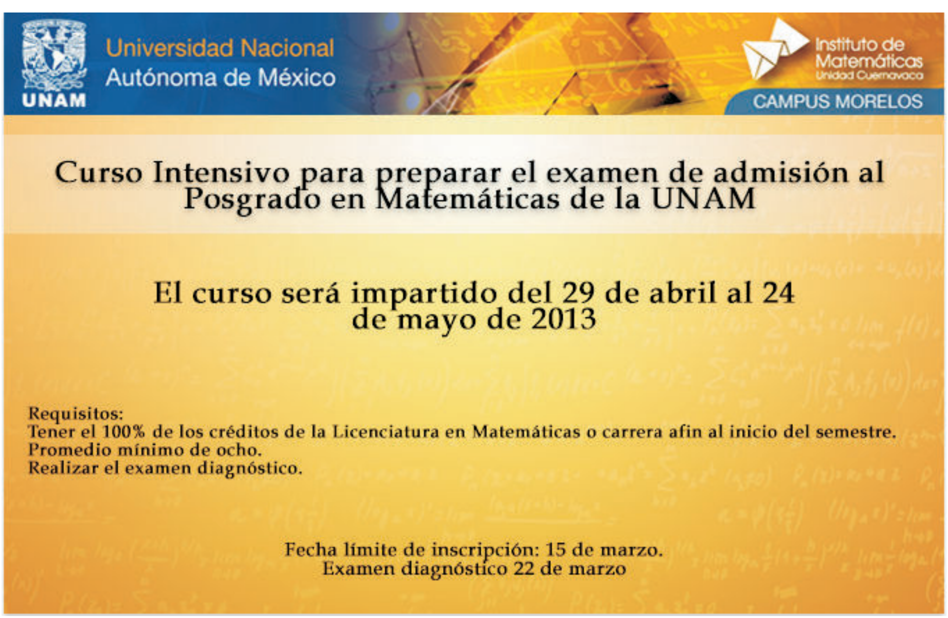
Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática

Dos académicos de la Universidad Anáhuac México Norte se han unido para compartirnos una de sus grandes pasiones: las matemáticas. Se trata de un libro recreativo, atractivo y de lectura muy fluida. Nos habla sobre los números, las fechas, los fenómenos matemáticos, el modo como funciona el tiempo y el universo. El título de la obra nos da una idea de su intención: Curiosidades matemáticas. Pero acaso todavía más elocuente es el subtítulo "Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática". Estoy convencido de que la vida universitaria se nutre de dos polos: por un lado, de la seria y sistemática actividad de docencia e investigación; por otro lado, de la amable y (¿por qué no?) también esforzada actividad de difusión. Este libro constituye un ejemplo brillante de esta última actividad, la cual solamente es posible cuando los académicos dominan realmente su ciencia y pueden mostrar, con claridad y sencillez, ocultos secretos de su disciplina.

Ficha técnica: Velasco--Antoniano. Curiosidades matemáticas. México: Universidad Anáhuac - primera edición, LIMUSA, 126 páginas, 2012, ISBN: 9786070504440

Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat

El Instituto Politécnico Nacional, por medio de la Escuela Superior de Física y Matemáticas, organiza el Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat. Se invita a participar en este concurso a todos los alumnos de los niveles secundaria, medio superior y superior, que tengan inclinación por las Matemáticas. La finalidad del evento es despertar entre la juventud el gusto por las matemáticas y su promoción a nivel nacional. Para mayores informes visite http://www.esfm.ipn.mx/pierre_fermat/Paginas/Inicio.aspx



CARTA INFORMATIVA
SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA
Número 66,
Marzo de 2013

Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A. C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D. F.
Tel. +52 (55) 5849-6710 y 19
smm@smm.org.mx

La Escuela Superior de Física y Matemáticas
del Instituto Politécnico Nacional
invita a las conferencias

INAUGURACIÓN
Febrero 5
¿Qué tan fácil es contar?
Innovaciones en los censos de Población y Vivienda en el Mundo
Gilberto Calvillo Vives

Febrero 19
Un viaje mágico y misterioso a un espacio de dimensión cuatro
Eduardo Virueña Silva

Marzo 5
Estadística Espacial y sus aplicaciones en el análisis de recursos naturales
Carlos Díaz Ávalos

Marzo 19
Escalamiento y memoria en señales: Una perspectiva estadística desde la física
Lev Guzmán Vargas

Abril 2
Estadística secuencial: ideas, resultados, perspectivas.
Andrey Novikov

Abril 16
¿Se necesita estar loco para ser un genio en Matemáticas?
Luis Manuel Tovar Sánchez

Abril 30
Razonamiento estocástico para extinción de especies
Miguel Nakamura Savoy

Mayo 14
Problemas de Liquidación Óptima
Gerardo Hernández del Valle

Comité organizador:
Erick Lee Guzmán
Eliseo Sarmiento Rosales
Pablo Paniagua López
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Alin Andrei Carsteanu

Horario: 14:00 h
Lugar: Salón 301
Inauguración: Auditorio "Dr. Víctor Flores Maldonado"
ENTRADA LIBRE
Informes: Departamento de Matemáticas, Edif. 9 Tercer Piso
Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Tel. 57296000, ext. 55011

"La Técnica al Servicio de la Patria"

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CONGRESO MATEMÁTICO DE LAS AMÉRICAS 2013

El primer Congreso Matemático de las Américas (MCA) se llevará a cabo en Guanajuato, México, del 5 al 9 agosto del 2013.
El objetivo del Congreso es resaltar la excelencia de los logros matemáticos de las Américas en el contexto de la escena internacional, y fomentar la colaboración entre los investigadores, estudiantes, instituciones y sociedades matemáticas en las Américas.
www.mca2013.org

Una felicitación a nuestro colega Jorge Nocedal,

a quién le acaban de otorgar el Premio Dantzig en Optimización Matemática, el cual se otorga cada tres años. Jorge Nocedal es un distinguido matemático, nacido en México. Realizó estudios de física a nivel licenciatura en la UNAM y obtuvo el doctorado en ciencias matemáticas en Rice University ubicada en Houston, Texas. Actualmente es director del Optimización Center dentro del departamento Industrial Engineering and Management Sciences en Northwertern University. En los siguientes enlaces se encuentra mayor información:

http://www.eecs.northwestern.edu/the-news/1497-jorge-nocedal-wins-the-george-b-dantzig-prize.html
http://www.mathopt.org/?nav=dantzig_2012

http://www.iems.northwestern.edu/people/faculty/profiles/nocedal-jorge.html