



CARTA INFORMATIVA

No. 69
Febrero-Abril
del 2014

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA



XLVII CONGRESO NACIONAL

26/31
OCTUBRE
2014

SMM
Sociedad Matemática
Mexicana

DURANGO



SOCIEDAD
MATEMÁTICA
MEXICANA

- ¿Qué es un álgebra de grupo?
- ¿Qué es una tabla de Young?



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

XXII SEMANA DE LAS MATEMÁTICAS

DEL 26 AL 30 DE MAYO DE 2014

CONFERENCIAS

MODELADO MATEMÁTICO

ESTADÍSTICA

COMPUTACIÓN

MATEMÁTICA EDUCATIVA

FINANZAS MATEMÁTICAS

RALLY MATEMÁTICO

INTRODUCCIÓN A R

CURSO DE L^AT_EX

CONCIERTOS

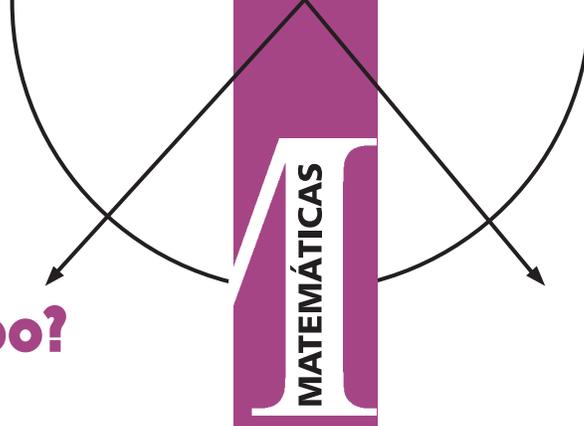
CONCURSO DE FOTOGRAFÍA

TORNEO DE BASQUETBOL



<http://mat.izt.uam.mx/mat>
clmat@xanum.uam.mx

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, Departamento de Matemáticas, Edificio AT, 3er piso, Av. San Rafael Atlixco, No. 186, Col Vicentina, Del. Iztapalpa, CP 09340, México, D. F., Teléfonos: 01(55)5804 4654 al 58.



¿Qué es un álgebra de grupo?

Raúl Quiroga-Barranco

CIMAT

Guanajuato, Gto

quiroga@cimat.mx

Una de las nociones más importantes, y a la vez sencilla, en matemáticas es la de grupo. Un grupo es un conjunto G con una operación asociativa xy que multiplica a elementos dados $x, y \in G$; se pide además la existencia de un elemento identidad e y que todo $x \in G$ posea un elemento inverso x^{-1} . En tal definición, es clara la ausencia de una estructura como la observada en los espacios vectoriales, es decir, lineal. El objetivo de esta nota es mostrar una construcción ya clásica asociada a todo grupo que proporciona tal estructura lineal.

Supongamos primero que G es un grupo finito. Podemos considerar entonces las sumas formales del tipo

$$\sum_{x \in G} a_x x \quad (1)$$

donde $a_x \in \mathbb{C}$. De manera más precisa se puede definir a una expresión de la forma (1) como una función $G \rightarrow \mathbb{C}$ dada por la asignación $x \mapsto a_x$. En particular y con ambas interpretaciones, tenemos ahora un espacio vectorial $\mathbb{C}[G]$ dado por todas las expresiones de la forma (1) y que contiene al grupo G . Observamos que los elementos de G forman una base de este espacio vectorial.

La representación (1) de los elementos de $\mathbb{C}[G]$ nos sugiere cómo definir un producto de dos de sus elementos:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{x \in G} a_x x \right) \left(\sum_{x \in G} b_x x \right) &= \sum_{x, y \in G} a_x b_y xy \\ &= \sum_{z \in G} \left(\sum_{x \in G} a_x b_{x^{-1}z} \right) z. \end{aligned} \quad (2)$$

En tal definición hemos supuesto de manera implícita la distributividad de tal producto sobre la suma en $\mathbb{C}[G]$. También se ha reagrupado en (1) la suma sobre $x, y \in G$ para obtener el tercer término de (2), el cual es claramente un elemento de $\mathbb{C}[G]$. No es difícil ver que (2) es una definición bien establecida que proporciona un producto a $\mathbb{C}[G]$. Con estas operaciones $\mathbb{C}[G]$ es una \mathbb{C} -álgebra asociativa para la cual dados $x, y \in G$ tenemos $xy = (1x)(1y)$; es decir, el producto en $\mathbb{C}[G]$ coincide con el de G en los elementos de este último. Llamamos a $\mathbb{C}[G]$ el álgebra de grupo del grupo finito G .

Para todo grupo finito G , su álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$ resulta ser fundamental para el estudio de las representaciones lineales. Una *representación lineal* del grupo G en un espacio vectorial complejo V es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V),$$

donde $\text{GL}(V)$ denota el grupo de transformaciones lineales invertibles del espacio vectorial V . Mediante una representación lineal como ésta, podemos considerar que al espacio vectorial V se le han agregado transformaciones de la forma $\rho(x)$ con $x \in G$ además de las ya dadas por la multiplicación por escalares en \mathbb{C} . Tal construcción es similar a una forma más general de espacio vectorial conocida como *módulo sobre un anillo*. Un módulo posee los mismos axiomas que un espacio vectorial salvo que los escalares forman solamente un anillo, para el cual no hay necesariamente inversos de elementos distintos de cero (ver [4]). En este caso, el anillo que debemos considerar es $\mathbb{C}[G]$ con el producto dado por (2). Se puede probar que existe una correspondencia biyectiva entre las representaciones lineales de V y las estructuras de módulo de V sobre el anillo $\mathbb{C}[G]$.

Dado un módulo V sobre $\mathbb{C}[G]$, podemos hablar de *submódulos* que son subespacios invariantes bajo la multiplicación por los escalares en $\mathbb{C}[G]$. Un módulo, y su correspondiente representación, se dice *irreducible* si no es la suma directa de dos submódulos distintos de 0 y V . Un problema fundamental en la teoría de representaciones es determinar aquellas que son irreducibles. Para el caso de grupos finitos, este problema se resuelve considerando el álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$. En primer lugar observamos que $\mathbb{C}[G]$ es un módulo sobre sí mismo, como de hecho ocurre con todo anillo. Es posible probar que cada representación irreducible V de G aparece como submódulo del módulo $\mathbb{C}[G]$, y que se repite en él tantas veces como la dimensión de V . Referimos al lector a [3] para los detalles de esta teoría.

Consideremos ahora el caso de un *grupo topológico*, es decir un grupo G que es a la vez un espacio topológico, de modo que tanto el producto $(x, y) \mapsto xy$ como la inversión $x \mapsto x^{-1}$ son continuas. Un ejemplo es dado por el grupo general lineal $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ de matrices reales invertibles de tamaño $n \times n$. La topología en $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ es la

heredada del espacio vectorial de matrices reales $n \times n$. Muchos otros ejemplos más son obtenidos tomando subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$. Entre estos últimos se encuentran la recta real \mathbb{R} con la suma, el círculo $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ y los números reales positivos \mathbb{R}^+ con el producto de números complejos y reales, respectivamente.

Para un grupo topológico G en general la suma definida por (1) no resulta ser finita y carece así de un significado apropiado. Sin embargo, podemos recurrir a la interpretación dada por funciones $G \rightarrow \mathbb{C}$. Así pues, para obtener un producto en el presente caso, observamos que el producto en (2) tiene por resultado a la función

$$x \mapsto \sum_{y \in G} a_y b_{y^{-1}x}. \quad (3)$$

Dadas dos funciones $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ queremos definir una nueva función que use esta última fórmula. Sin embargo, esto requiere de nuevo una suma que no podemos considerar para grupos topológicos no finitos.

El problema anterior se puede resolver introduciendo una medida en G sobre los conjuntos de Borel, es decir, la σ -álgebra generada por los abiertos de G . La definición de estos objetos junto con las nociones de análisis que se utilizan a continuación pueden ser consultadas en [5]. Si denotamos por μ una medida en G , entonces dadas f, g funciones complejas sobre G definimos su producto como la función

$$(f * g)(x) = \int_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y). \quad (4)$$

Con tal expresión tenemos una generalización de (2) basada en (3), en la que la suma ha sido reemplazada por una integral. Sin embargo, claramente requerimos ciertas restricciones sobre las funciones f, g . Para considerar la integral en (4) necesitamos al menos que f, g sean medibles. Como además necesitamos asegurar la existencia de la integral (4) es natural pedir que $f, g \in L^1(G, \mu)$ (el espacio formado por las funciones integrables en G respecto de la medida μ), en cuyo caso esperamos que $f * g$ también pertenezca a $L^1(G, \mu)$. Al calcular la integral de $f * g$, utilizando el teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{x \in G} \int_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y)d\mu(x) \\ &= \int_{y \in G} \left(f(y) \int_{x \in G} g(y^{-1}x)d\mu(x) \right) d\mu(y). \end{aligned} \quad (5)$$

De no ser por la presencia del factor y^{-1} en el argumento de g tendríamos como resultado el producto de las integrales de f y g , las cuales sabemos que existen y son finitas. En este punto es importante hacer notar que hasta ahora no se ha elegido la medida μ sobre G . Al respecto se define una *medida de Haar sobre G* como una medida μ *invariante bajo traslaciones izquierdas*, es decir, para la cual

$$\int_{x \in G} g(yx)d\mu(x) = \int_{x \in G} g(x)d\mu(x),$$

para todo $y \in G$ y toda función $g \in L^1(G, \mu)$. Con una medida de Haar la identidad (5) se reduce a

$$\int f * g d\mu = \left(\int f d\mu \right) \left(\int g d\mu \right),$$

lo cual garantiza que el producto $f * g$ es bien definido y pertenece a $L^1(G, \mu)$.

Para un grupo topológico G , el álgebra de grupo de G es $L^1(G, \mu)$ con el producto dado por (4), donde ahora μ es una medida de Haar. Al producto $f * g$ se le llama la *convolución de f y g* . Usando las propiedades básicas de integración no es difícil ver que $L^1(G, \mu)$ es una \mathbb{C} -álgebra asociativa. Estas nociones y sus propiedades básicas se pueden encontrar en [2].

Respecto de la medida de Haar, es un resultado clásico que todo grupo topológico localmente compacto posee una medida de Haar. Además, cualesquiera dos medidas de Haar son una múltiplo constante de la otra. Por esta razón se habla de la medida de Haar y el álgebra de grupo de G se denota simplemente por $L^1(G)$. Tenemos los siguientes ejemplos.

1. Si G es un grupo finito, la medida de Haar es la medida de contar. Es fácil ver que (4) se reduce a (2) en este caso.
2. La medida de Haar en \mathbb{R} es la medida de Lebesgue. La convolución en $L^1(\mathbb{R})$ es la convolución usual de funciones de una variable real.
3. La medida de Haar en \mathbb{T} es la longitud de arco, y de nuevo la convolución es la usualmente considerada en $L^1(\mathbb{T})$.
4. La medida de Haar en \mathbb{R}^+ es dx/x donde dx denota la medida de Lebesgue. La convolución en $L^1(\mathbb{R}^+)$ es dada por

$$(f * g)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^+} f(y)g(y^{-1}x) \frac{dy}{y}.$$

5. La medida de Haar en $GL(n, \mathbb{R})$ es dada por

$$dA/|\det(A)|^n,$$

donde dA denota la medida de Lebesgue en el espacio vectorial de matrices reales $n \times n$, que contiene a $GL(n, \mathbb{R})$ como subconjunto abierto. La convolución en este caso posee una expresión similar a la dada en el ejemplo anterior.

Como en el caso de grupos finitos, el álgebra de grupo $L^1(G)$ es de fundamental importancia para estudiar las representaciones de G y muchos otros aspectos de G mismo. Un ejemplo muy elemental de ello puede observarse con $L^1(\mathbb{T})$. En primer lugar sabemos que todo homomorfismo continuo de $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ es de la forma

$$\begin{aligned} e_n : \mathbb{T} &\rightarrow \mathbb{T} \\ z &\mapsto z^n. \end{aligned}$$

Por otro lado, la convolución de $f \in L^1(\mathbb{T})$ con e_n es

$$\begin{aligned}(f * e_n)(z) &= \int_{w \in \mathbb{T}} f(w) e_n(w^{-1}z) dw, \\ &= \int_{w \in \mathbb{T}} f(w) w^{-n} z^n dw, \\ &= \widehat{f}(n) e_n(z),\end{aligned}$$

donde $\widehat{f}(n)$ es el n -ésimo coeficiente de Fourier de f . De lo cual se concluye que

$$f * \left(\sum_{k=-n}^n e_k \right) (z) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) z^k$$

es la n -ésima suma parcial de Fourier de f . En particular, la serie de Fourier, así como algunas otras sumas relacionadas, de un elemento en $L^1(\mathbb{T})$ se obtiene mediante convolución con los llamados polinomios trigonométricos.

Por otro lado, si G es un grupo compacto, entonces $L^2(G)$ contiene como submódulos sobre $L^1(G)$ a todas las representaciones irreducibles de G , y cada una aparece tantas veces como su dimensión (ver [1]). Una formulación de este hecho se conoce como el *teorema de Peter-Weyl*. Lo anterior constituye además una generalización del correspondiente resultado mencionado inicialmente para grupos finitos. Sin embargo, el caso de grupos topológicos no compactos es bastante más complicado y requiere la consideración de representaciones en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Una introducción a este problema puede encontrarse en [2].

Bibliografía

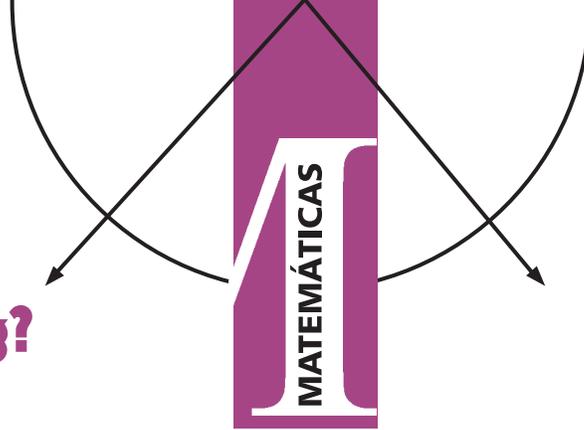
- [1] T. Bröcker, T. tom Dieck. Representations of compact Lie groups. Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [2] G. B. Folland. A course in abstract harmonic analysis. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [3] W. Fulton, J. Harris. Representation theory. A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] S. Lang. Algebra. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] W. Rudin. Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.



XIV Escuela de Matemáticas de América Latina y el Caribe

21 de julio al 1 de agosto de 2014
Chiapas, Mexico

<http://www.emalca2014.unach.mx/>



¿Qué es una tabla de Young?

Ernesto Vallejo

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Campus Morelia

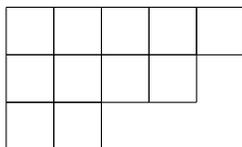
vallejo@matmor.uam.mx

Una *tabla de Young* es un arreglo de números enteros positivos distribuidos por renglones y columnas, de manera similar a como lo están las entradas de una matriz, pero sin necesidad de que haya la misma cantidad de números en cada renglón o en cada columna. Alfred Young introdujo estas tablas en 1901 en su primer trabajo [26] sobre *análisis de sustituciones*. Muy pronto, en 1903, Ferdinand Georg Frobenius se dio cuenta de su utilidad y los utilizó para dar una fórmula de los caracteres irreducibles del grupo simétrico [8, §8]. Con el paso del tiempo las tablas de Young se convirtieron en una herramienta extremadamente útil en la teoría de representaciones del grupo simétrico y el grupo lineal general [6; 11; 21], en el álgebra de funciones simétricas [15; 24] y en el cálculo de Schubert de Grassmannianas [4; 5].

Una *partición* λ de un entero positivo n (lo cual denotaremos $\lambda \vdash n$) es una sucesión $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de enteros positivos cuya suma es n y $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$. La *longitud* $\ell(\lambda)$ de λ es p , el número de sus *partes*. A cada partición λ se le asocia un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que, por abuso de lenguaje, denotamos con la misma letra:

$$\lambda = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Este conjunto se llama el *diagrama de Ferrers* o de *Young* de la partición λ ; se le representa gráficamente como un conjunto de puntos (diagrama de Ferrers) o de cuadros (diagrama de Young), uno por cada pareja $(i, j) \in \lambda$, colocado de acuerdo a sus coordenadas en notación matricial. Por ejemplo, el diagrama de Young asociado a la partición $(5, 4, 2)$ es:

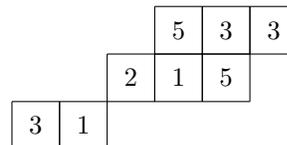


De manera más general, si λ y μ son dos particiones y $\mu \subseteq \lambda$ (como conjuntos), el *diagrama sesgado* correspondiente a estas particiones es la diferencia de conjuntos

$$\lambda/\mu = \{a \in \lambda \mid a \notin \mu\},$$

y su *tamaño* es su cardinalidad: $|\lambda/\mu| = \#\lambda/\mu$.

Una *tabla de Young* de forma λ/μ es un llenado de los cuadros del diagrama λ/μ con enteros positivos. Formalmente, es una aplicación $T : \lambda/\mu \rightarrow \mathbb{N}$. El llenado se interpreta al poner el número $T(i, j)$ en el cuadro (i, j) . El *contenido* de T es el vector $c(T) = (c(1), c(2), \dots)$ donde $c(i) = \#T^{-1}(i)$ es el número de veces que aparece i en T . Dado que el diagrama λ/μ es finito, el contenido $c(T)$ de cualquier tabla T tiene una cola infinita de ceros que podemos omitir. Por ejemplo,



es una tabla de Young de forma $(6, 5, 2)/(3, 2)$ y contenido $(2, 1, 3, 0, 2)$. La *palabra* $w(T)$ asociada a una tabla de Young T se obtiene de leer las entradas de T por renglones de derecha a izquierda, empezando con el primer renglón. Por ejemplo, la palabra de la tabla anterior es 33551213. Sea $[n] = \{1, \dots, n\}$. Decimos que una palabra $w_1 \dots w_n$ en el alfabeto \mathbb{N} es una *palabra reticular* o de *Yamanouchi* si para cualquier $i \in [n]$ y cualquier $j \in \mathbb{N}$ el número de j 's en el segmento $w_1 \dots w_i$ no excede el número de $(j+1)$'s en el mismo segmento. Por ejemplo, 121312425 es una palabra reticular.

Young trabajó originalmente con aplicaciones biyectivas $T : \lambda \rightarrow [n]$, es decir, con tablas con n cuadros donde los números $1, \dots, n$ aparecen exactamente una vez. A cada una de estas tablas —hay $n!$ de ellas para cada forma λ — Young le asoció una combinación lineal de permutaciones con coeficientes enteros. Para esto definió dos grupos: el grupo R de las permutaciones en S_n que preservan los renglones de T , y el grupo C de las permutaciones en S_n que preservan las columnas de T . Denotemos por $\text{sgn}(\sigma)$ al signo de la permutación σ . Entonces

$$y_T = \left(\sum_{\rho \in R} \rho \right) \left(\sum_{\gamma \in C} \text{sgn}(\gamma) \gamma \right) \quad (1)$$

es el *simetrizador de Young* asociado a T . En lenguaje moderno y_T es un elemento del álgebra de grupo $\mathbb{Q}[S_n]$: dos

permutaciones se multiplican componiéndolas como funciones y el producto (1) se calcula utilizando la linealidad del producto. Esta es una de las nociones fundamentales que aparece en los primeros trabajos de Young [26; 27].

Años después, Young observó que un subconjunto de las tablas usadas para definir sus simetrizadores tenía una importancia particular, y en 1927 introdujo la noción de tabla estándar [28]. La utilizó en éste y en sus trabajos posteriores para construir de tres maneras equivalentes, pero distintas, las representaciones irreducibles del grupo simétrico. Estas construcciones se conocen ahora como, las representación natural, la seminormal y la ortogonal del grupo simétrico. El lector interesado puede consultar una descripción detallada del trabajo de Young en un lenguaje más accesible en [11; 20].

Una *tabla de Young estándar de forma* λ es una aplicación biyectiva $T : \lambda \rightarrow [n]$ tal que la distribución de los números es creciente por renglones, de izquierda a derecha, y por columnas, de arriba a abajo. Por ejemplo

1	2	6	7	11
3	4	8	10	
5	9			

es una tabla de Young estándar de forma $(5, 4, 2)$.

Hay una biyección canónica entre el conjunto de clases de isomorfía de representaciones irreducibles del grupo simétrico S_n sobre \mathbb{C} y el conjunto de particiones de n . Denotemos por V^λ la representación irreducible asociada a λ . Young demostró que la dimensión f^λ de V^λ es igual al número de tablas de Young estándar de forma λ . Esto es importante porque la dimensión de V^λ está dada no solo por un número, sino por el número de una colección de objetos combinatorios relacionados con λ . Las tablas de Young estándar tienen una rica estructura combinatoria que se refleja en las propiedades de f^λ y, también, en la estructura algebraica de V^λ .

La primera relación combinatoria entre los diversos números f^λ la observó Young en [28, p. 261]. Para enunciarla usaremos, para cada partición λ de n , la siguiente notación

$$R(\lambda) = \{\mu \vdash n - 1 \mid \mu \subseteq \lambda\}$$

e

$$I(\lambda) = \{\nu \vdash n + 1 \mid \lambda \subseteq \nu\}.$$

Los diagramas en $R(\lambda)$ se obtienen de λ quitando un cuadro al final de un renglón de λ de manera que el conjunto resultante siga siendo un diagrama de Young. Similarmente, los diagramas de $I(\lambda)$ se obtienen de λ agregando un cuadro al final de un renglón de λ o agregando un nuevo renglón con un único cuadro de manera que el conjunto resultante siga siendo un diagrama de Young.

La siguiente identidad de Young es fácil de demostrar directamente:

$$f^\lambda = \sum_{\mu \in R(\lambda)} f^\mu. \quad (2)$$

Otra identidad relacionada con la anterior [28, p. 262], [20, §15] es

$$(n + 1)f^\lambda = \sum_{\nu \in I(\lambda)} f^\nu. \quad (3)$$

Estas dos identidades, aunque fáciles de demostrar, reflejan, a nivel combinatorio, dos propiedades importantes de las representaciones irreducibles del grupo simétrico: las *reglas de ramificación* (ver [21, p. 77]). Si V es una representación de S_n , podemos restringir la acción de S_n a S_{n-1} , simplemente ignorando la acción de las permutaciones que mueven al número n . La nueva representación de S_{n-1} se denota por $\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V)$. Entonces la identidad (2) es el reflejo de algo más profundo: el isomorfismo de representaciones de S_{n-1}

$$\text{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(V^\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in R(\lambda)} V^\mu. \quad (4)$$

Young probó este resultado en el caso de la representación seminormal en [29, p. 209].

De manera similar la ecuación (3) es el reflejo de un isomorfismo entre representaciones de S_{n+1} que involucra otra construcción, llamada la *inducción*, que a cada representación V de S_n le asocia una representación $\text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}(V)$ de S_{n+1} cuya dimensión es $n + 1$ veces la dimensión de V . El isomorfismo (4) permite construir una base especial de V^λ llamada la *base de Gelfand–Tsetlin*. Esta construcción es uno de los ingredientes en el enfoque de A. Okounkov y A. Vershik de la teoría de representaciones del grupo simétrico [17; 25; 3].

Los números f^λ satisfacen otras identidades que combinan belleza y elegancia. A continuación listamos tres de ellas:

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n! \quad (5)$$

$$\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = id\}. \quad (6)$$

Estas dos identidades se pueden demostrar combinatoriamente a partir de la célebre correspondencia de Robinson–Schensted y sus propiedades [19; 22; 12; 4; 21]. Ésta es una biyección definida por un algoritmo que dada una permutación $\sigma \in S_n$ indica cómo construir una pareja de tablas de Young estándar $(P(\sigma), Q(\sigma))$ de la misma forma. Así, la biyección

$$\sigma \longleftrightarrow (P(\sigma), Q(\sigma))$$

da una demostración combinatoria de la ecuación (5). La correspondencia de Robinson–Schensted satisface cierta simetría descrita por las igualdades entre tablas [23; 12; 4; 21]: $P(\sigma) = Q(\sigma^{-1})$ y $Q(\sigma) = P(\sigma^{-1})$, de las cuales se sigue (6).

La tercera identidad es la fórmula de escuadras [7; 10; 16]

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_{i,j}}, \quad (7)$$

donde $h_{i,j}$ es el número de cuadros en la escuadra

$$H_{i,j} = \{(a, b) \in \lambda \mid (a = i \text{ y } b \geq j) \text{ o } (a \geq i \text{ y } b = j)\}.$$

Por ejemplo, si $\lambda = (5, 4, 2)$, llenemos los cuadros de λ con los números $h_{i,j}$:

7	6	4	3	1
5	4	2	1	
2	1			

Entonces, aplicando (7), obtenemos que

$$f^{(5,4,2)} = \frac{11!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1^3} = 990.$$

Parte de la fascinación de esta fórmula es su sencillez. Sin embargo, a pesar de la variedad de demostraciones producidas desde su descubrimiento, se considera que aún no se ha encontrado una explicación satisfactoria de porqué aparecen las longitudes de las escuadras en la fórmula.

Una *tabla de Young semiestándar (TYS)* de forma λ/μ es una tabla $T : \lambda/\mu \rightarrow \mathbb{N}$ tal que el llenado de números en λ/μ crece débilmente a lo largo de los renglones de izquierda a derecha, y crece estrictamente a lo largo de las columnas de arriba a abajo, es decir, (1) si $k < l$, entonces $T(i, k) \leq T(i, l)$; y (2) si $i < j$, entonces $T(i, k) < T(j, k)$. Por ejemplo

			1	3	3
		2	5	5	
1	3				

es una *TYS* de forma $(6, 5, 2)/(3, 2)$ y contenido $(2, 1, 3, 0, 2)$.

Las *TYS* son una herramienta muy útil en la teoría de polinomios y funciones simétricos [15; 24]). Una de las familias de polinomios simétricos más importantes es la de los polinomios de Schur. Su definición clásica, que data del siglo XIX, está dada por el cociente de dos determinantes. La definición combinatoria que damos a continuación aparece ya en [14] (el capítulo 7 del libro de Stanley [24] contiene una sección muy útil de notas históricas sobre las tablas de Young y las funciones simétricas). Dada una *TYS* T de contenido $c = (c_1, \dots, c_n)$ denotaremos

$$x^T = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n}.$$

Entonces el *polinomio de Schur* asociado a λ es

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_T x^T$$

donde T recorre los elementos del conjunto de *TYS*'s de forma λ con entradas en $[n]$. Por ejemplo, si $\lambda = (2, 1)$ y $n = 3$, hay exactamente dos *TYS*'s de forma λ y contenido $(1, 1, 1)$, y una *TYS* de forma λ por cada uno de los siguientes contenidos: $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 2, 1)$ y $(0, 1, 2)$. Así,

$$s(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.$$

También hay una biyección natural entre el conjunto de representaciones irreducibles polinomiales del grupo lineal general $GL_n(\mathbb{C})$ de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con entradas en \mathbb{C} y el conjunto de particiones de longitud a lo más n dada por $\lambda \longleftrightarrow S_\lambda(\mathbb{C}^n)$. Con ayuda de los simetrizadores de Young es posible construir estas representaciones y

con ayuda de $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ se puede calcular el carácter de $S_\lambda(\mathbb{C}^n)$.

El conjunto de polinomios de Schur

$$\{s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \mid \lambda \text{ es una partición y } \ell(\lambda) \leq n\}$$

es una base del anillo $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ de polinomios simétricos, es decir, polinomios que no cambian, cuando, para cada permutación $\sigma \in S_n$, sustituimos las variables x_1, \dots, x_n por $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$, respectivamente.

Si λ y μ son dos particiones de longitudes l y m , respectivamente, y $n \geq l + m$, entonces los coeficientes $c_{\lambda, \mu}^\nu$ en la expansión

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) s_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu \vdash (l+m)} c_{\lambda, \mu}^\nu s_\nu(x_1, \dots, x_n)$$

se llaman coeficientes de *Littlewood–Richardson*. La *regla de Littlewood–Richardson* establece que $c_{\lambda, \mu}^\nu$ se puede calcular combinatoriamente como el número de *TYS*'s de forma ν/λ y contenido μ tales que su palabra asociada es una palabra reticular. Estas tablas se llaman de *Littlewood–Richardson*. Por lo tanto estos coeficientes son enteros no negativos (lo cual no es evidente de su definición).

Parte de la importancia de estos coeficientes es su aparición en áreas tan diversas y sin conexión aparente como: valores propios de matrices hermitianas, factores invariantes, productos tensoriales de representaciones de $GL_n(\mathbb{C})$ y cálculo de Schubert de Grassmannianas (ver [5]).

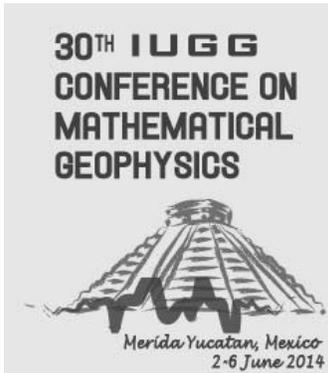
Una conjetura importante, la *conjetura de saturación*, afirmaba, para cada terna λ, μ, ν de particiones tal que para algún entero positivo N se cumple $c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} > 0$, entonces $c_{\lambda, \mu}^\nu > 0$. Aquí, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $N\lambda = (N\lambda_1, \dots, N\lambda_p)$. A. Knutson y T. Tao [13; 2] introdujeron en 1999 la noción de *panal (honeycomb)*, y con ella demostraron la conjetura de saturación.

Se debe a Gelfand y Tsetlin [9] la idea de representar las *TYS*'s como vectores de puntos con coordenadas enteras en un espacio euclidiano que satisfacen ciertas desigualdades lineales. Esta idea se usa en los triángulos de Berenstein–Zelevinsky [1] y en las *colmenas (hives)* de Knutson y Tao [13; 2]. En cada caso los autores muestran que sus construcciones son equivalentes a las tablas de Littlewood–Richardson. En [18] se expresa la noción de tabla de Littlewood–Richardson tradicional en términos de desigualdades lineales y se definen, por primera vez, transformaciones lineales que establecen equivalencias sencillas entre estos tres modelos.

Bibliografía

- [1] A.D. Berenstein y A.V. Zelevinsky, Triple multiplicities for $\mathfrak{sl}(r+1)$ and the spectrum of the exterior algebra of the adjoint representation, *J. Algebraic Combin.* **1** (1992), 7–22.

- [2] A. Buch, The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao), *Enseign. Math.* **46** (2000) 43–60.
- [3] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti y F. Tolli. “Representation theory of the symmetric groups. The Okounkov-Vershik approach, character formulas, and partition algebras”, Cambridge studies in advanced mathematics 121, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [4] W. Fulton, “Young tableaux”, London Math. Soc. Student Texts 35, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [5] W. Fulton, Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus, *Bulletin of the AMS* **37** (2000), 209–249.
- [6] W. Fulton y J. Harris, “Representation theory. A first course”, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer, Nueva York, 1991.
- [7] J. S. Frame, G. de B. Robinson y R. M. Thrall, The hook graphs of the symmetric group, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–324.
- [8] F. G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1903), 328–358. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. III, Ed. J. P. Serre, Springer Verlag, Berlín, 1968, 244–274.
- [9] I. M. Gelfand y M. L. Tsetlin, Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices, *Doklady Akad. Nauk SSSR* **71** (1950), 825–828.
- [10] C. Greene, A. Nijenhuis y H. Wilf, A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape, *Adv. in Math.* **31** (1979), 104–109.
- [11] G. D. James y A. Kerber, “The representation theory of the symmetric group”, *Encyclopedia of mathematics and its applications*, Vol. 16, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.
- [12] D. E. Knuth, Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* **34** (1970), 709–727.
- [13] A. Knutson y T. Tao, The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture, *Journal of the AMS* **12** (1999), 1055–1090.
- [14] D. E. Littlewood, The construction of invariant matrices, *Proc. London Math. Soc.* **43** (1937), 226–240.
- [15] I. G. Macdonald, “Symmetric functions and Hall polynomials”, 2a. edición, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [16] J.-C. Novelli, I. Pak y A. V. Stoyanovskii, A direct bijective proof of the hook-length formula, *Discrete Math. Theoret. Computer Science* **1** (1997), 53–67.
- [17] A. Okounkov y A. Vershik, A new approach to representation theory of symmetric groups, *Selecta Mathematica, New Series* **2** (1996), 581–605.
- [18] I. Pak y E. Vallejo, Combinatorics and geometry of Littlewood-Richardson cones, *European Journal of Combinatorics* **26** (2005), 995–1008.
- [19] G. de B. Robinson, On the representations of the symmetric group, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 745–760.
- [20] D. E. Rutherford, “Substitutional analysis”, Edinburg University Press, 1948. Reimpreso por Dover, 2013.
- [21] B. Sagan, “The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions”, Springer Verlag, Nueva York, 2a. ed., 2001.
- [22] C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, *Canad. J. Math.* **13** (1961), 179–191.
- [23] M. P. Schützenberger. Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand.* **12** (1963), 117–128.
- [24] R. P. Stanley, “Enumerative combinatorics, Vol. 2”, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [25] A. Vershik y A. Okounkov, A new approach to the representation theory of the symmetric groups. II, *Journal of Mathematical Sciences* **131** (2005) 5471–5494.
- [26] A. Young, On quantitative substitutional analysis, *Proc. London Math. Soc.* **33** (1901), 97–146.
- [27] A. Young, On quantitative substitutional analysis (second paper), *Proc. London Math. Soc.* **34** (1902), 361–397.
- [28] A. Young, On quantitative substitutional analysis (third paper), *Proc. London Math. Soc.* s2 **28** (1928), 255–292.
- [29] A. Young, On quantitative substitutional analysis (sixth paper), *Proc. London Math. Soc.* s2 **34** (1932), 196–230.



The 30th IUGG Conference on Mathematical Geophysics will be held in Merida, Yucatan, Mexico, from 2 to 6 June 2014. It is organized by the National Autonomous University of Mexico (UNAM) in honors of Professor Ismael Herrera.

IUGG conferences on mathematical geophysics are premier scientific meetings of the Union Commission on Mathematical Geophysics of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG; www.iugg.org). The aim of the commission is to encourage exchange of ideas and information in all areas of geophysics, with emphasis on the application of mathematics, statistics and computer science to geophysical problems, and to promote the development and application of mathematical methods and appropriate theoretical techniques for the solution of problems across the complete spectrum of geophysical disciplines.

<http://eventos.iingen.unam.mx/IUGG2014/>



CEMRACS 2014

*Numerical modeling
of plasmas*

July 21 - August 29, CIRM, Marseille

<http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs14/>

THIRD INTERNATIONAL WORKSHOP ON ZETA FUNCTIONS IN ALGEBRA AND GEOMETRY

The Center for Research in Mathematics A.C., CIMAT, Guanajuato, Mexico, September 8th to 12th, 2014



Zeta functions can be attached to several mathematical objects like fields, groups, algebras, functions, and dynamical systems. Typically zeta functions encode relevant arithmetic, algebraic, geometric or topological information about the original object.

The second workshop was held in Palma de Mallorca, Spain, from May 3th to May 7th, 2010.

The proceedings of the conference were published by the American Mathematical society.

The first workshop was held in Segovia, Spain, from June 25th to June 29th, 2007. Both workshops had about 25 plenary talks and more than 45 participants, from Europe, Japan, Latin America and U.S.A.

The conference will be hosted by The Center for Research in Mathematics A.C., CIMAT. This is one of the National Council of Science and Technology's (CONACYT) Public Research Centers. It was founded in the city of Guanajuato in 1980 with the aim of fostering research, study, development and dissemination of mathematics and its applications in various areas of scientific and technological development.

Topics

The conference will focus on current advances and perspectives related to the following topics:

- ◆ Arithmetic and geometric aspects of p -adic, topological and motivic zeta functions.
- ◆ Motivic integration and its interaction with geometry, model theory, analysis and physics
- ◆ Height zeta functions
- ◆ Poincaré series of valuations
- ◆ Zeta functions of groups, rings and representations

<http://www.math.cinvestav.mx/Workshop14/>



International Congress on Music and Mathematics

Puerto Vallarta, Mexico,
November 22-26, 2014

Special theme
"Analogous Thought and Abstract Forms in Music"

Special panel
"Mathematics and Aesthetics in Julian Carrillo's (1875-1965) work"

<http://icmm.cucei.udg.mx/>

Palas y las musas: diálogos entre la ciencia y el arte

El proyecto multidisciplinario Palas y las Musas: diálogos entre la ciencia y el arte, en el cual intervienen el Instituto de Investigaciones Estéticas y el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM, llevará a cabo su I Congreso Internacional del 20 al 22 de agosto del 2014, en el Centro de Investigación en Matemáticas CIMAT con sede en Guanajuato; donde especialistas de México y el extranjero abordarán diversas temáticas sobre la vinculación entre las ciencias naturales y formales con las disciplinas artísticas, desde el Renacimiento hasta nuestros días.
Informes:

palasyasmusas@gmail.com,
<http://palasyasmusas.iimas.unam.mx/>

Sexto Concurso de Problemas para las Olimpiadas de Matemáticas

La Sociedad Matemática Mexicana a través del Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas invita a todos los miembros de la comunidad matemática del país (estudiantes, investigadores, profesores) a enviar problemas para participar en el sexto concurso nacional de problemas para las olimpiadas de matemáticas.

BASES

- 1.- Los problemas para el concurso deberán versar sobre algunos de los temas siguientes: geometría, teoría de números, combinatoria o álgebra.
- 2.- Los problemas podrán ser utilizados en los exámenes correspondientes a las olimpiadas: Iberoamericana, Centroamericana y del Caribe, Internacional, Cuenca del Pacífico o del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
- 3.- Los problemas deberán ser inéditos y no podrán hacerse públicos antes de diciembre del año 2015, ya que podrán ser utilizados en cualquiera de las olimpiadas mencionadas en el punto 2, durante las olimpiadas de 2014 o 2015.
- 4.- Los problemas deberán ser enviados, junto con sus soluciones, al correo: jago@ciencias.unam.mx, antes del **31 de julio del 2014**.
5. Los formatos en los que se recibirán son: archivo latex o word. Problemas diferentes deberán ir en hojas diferentes y las hojas sin ninguna identificación personal o de la institución a la que pertenezca.
- 6.- Se otorgarán los premios siguientes:
Primer lugar: \$5,000 (cinco mil pesos)
Segundo lugar: \$ 3,000 (tres mil pesos)
Tercer lugar: \$2,000.00 (dos mil pesos)

Problemas que no queden en alguno de los lugares anteriores pero que sean seleccionados para formar parte del examen de alguna de las olimpiadas mencionadas en el punto no. 2 \$1,500.00 (mil quinientos pesos).

Atentamente: Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Cuarto Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística 2014

El Comité Organizador del Cuarto Encuentro Internacional en la Enseñanza de la Probabilidad y la Estadística 2014, convoca a todos los interesados en presentar un trabajo de investigación en modalidad oral, virtual o cartel. Los trabajos se recibirán en formato electrónico escritos con el procesador de palabras Microsoft Office Word, mediante los lineamientos que se describen a continuación, a más tardar el 2 de Junio de 2014, para ser sometido a arbitraje. En caso de ser aceptada su participación, le será enviada una carta de aceptación por medio electrónico al correo de contacto indicado al momento del registro de su trabajo.

<http://cape.fcfm.buap.mx/Eiepe2014/index.html>

XIV Escuela de verano en matemáticas

Fecha: 23 al 27 de Junio de 2014.

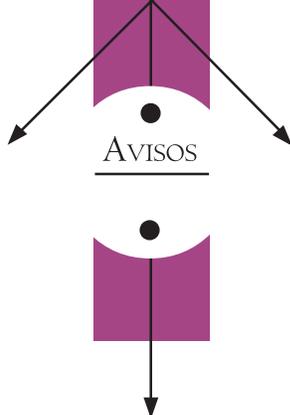
Lugar: Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM Campus Morelia.

En esta ocasión contaremos con una buena diversidad de minicursos y conferencias que se podrán ofrecer durante la escuela.

Al momento de llenar su solicitud de participación, cada alumno deberá inscribirse en al menos tres minicursos-talleres y seleccionar dos para ser evaluado. Aquellos estudiantes que tengan un desempeño sobresaliente en los dos minicursos-talleres seleccionados serán acreedores a un diploma extra con valor curricular.

Para más información, favor de dirigirse a: escuela@matmor.unam.mx

<http://matmor.unam.mx/eventos/esver14>



NOTA INFORMATIVA

Hacemos del conocimiento de la comunidad matemática mexicana que recientemente el SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) ha seleccionado al Dr. Jorge X. Velasco Hernández como 'Fellow'. Este nombramiento honorífico es concedido a investigadores que han hecho contribuciones sobresalientes en algunos de los campos de la matemática aplicada que se cultivan dentro de dicha organización de E.U. La selección de los miembros nominados se realiza anualmente por pares académicos.

El certificado y reconocimiento oficial se otorgarán en la reunión anual del SIAM en día 18 de Julio del 2014 en Chicago. Recordamos que el Dr. Jorge X. Velasco Hernández, actualmente es el Presidente de la Junta Directiva de la Sociedad Matemática Mexicana.

Felicitamos al Dr. Jorge X. Velasco Hernández por este reconocimiento.

Más información en <http://fellows.siam.org/> y en <http://www.siam.org/prizes/fellows/index.php>

CARTA INFORMATIVA DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA, Número 69, Febrero-Abril del 2014, es una publicación trimestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, No. Ext. s/n, Col. San Andrés Totoltepec, C.P. 14400, Delegación Tlalpan, Distrito Federal, Tel. 58496709, <http://www.smm.org.mx>, smm@smm.org.mx. Editor responsable: Lorenzo Héctor Juárez Valencia. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-090614102900-106, ISSN: 2007-7122, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Licitud de Título y contenido No. 16036, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Permiso SEPOMEX EN TRÁMITE. Impresa por RT Grafismo, S.A. de C.V., 5 de Febrero No. 324H, Col. Obrera, México, D.F. Del. Cuauhtémoc, C.P. 06800, este número se terminó de imprimir el 30 de abril del 2014 con un tiraje de 500 ejemplares.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Sociedad Matemática Mexicana, A.C.



CARTA INFORMATIVA

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 69,
Febrero-Abril
del 2014
Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A. C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D. F.
Tel. +52 (55) 5849-6710 y 19
smm@smm.org.mx

JUNTA DIRECTIVA

Jorge X. Velasco Hernández
Presidente

Ricardo Cantoral Uriza
Vicepresidente

Luz de Teresa de Oteyza
Secretaria General

Daniel Olmos Liceaga
Secretario de Actas

Mariano José Juan Rivera Meraz
Tesorero

Graciela González Fariás
Secretaria de Vinculación

Mayra Nuñez López
Vocal

Alejandro R. Femat Flores
Vocal

COMITÉ EDITORIAL Y DE DIFUSIÓN

Lorenzo Héctor Juárez Valencia
(Coordinador)

Fernando Galaz Fontes

Pedro González-Casanova Henríquez

Víctor Hugo Ibarra Mercado

Mario Pineda Ruelas

Carlos E. Valencia Oleta

EDITOR TÉCNICO

Daniel Espinosa Pérez

COLABORADORES

Luz María Briseño

Daniel Espinosa Pérez

IMPRESIÓN

RT Grafismo, S. A. de C. V.
Tel. 5740 7190 / Fax 5740 7113
rtgrafismo@prodigy.net.mx

PORTADA

Anuncio del XLVII Congreso de la
SMM. Puente Baluarte Bicentenario

International Congress of Women Mathematicians ICWM 2014

2014 세계여성수학자대회

August 12, 2014

at Ewha Womans University, Seoul, Korea

August 14, 2014

at COEX Convention Center, Seoul, Korea



www.kwms.or.kr/icwm2014
icwm2014.seoul@gmail.com

KWMS 한국여성수리과학회
Korean Women in Mathematical Sciences

