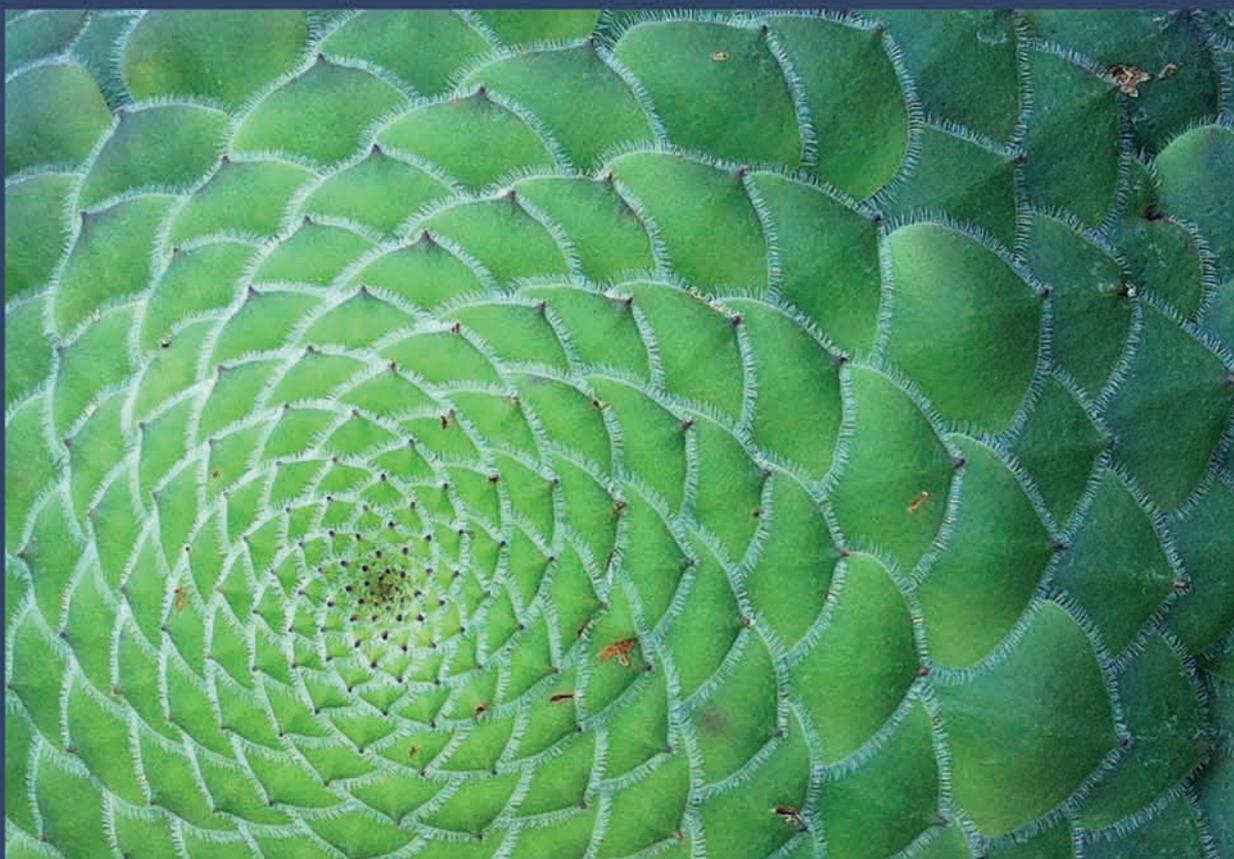




CARTA INFORMATIVA

No. 71
Agosto-Octubre
del 2014

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA



- La divina proporción
- ¿Qué dice el teorema de Viviani?

IV ENCUENTRO CUBA- MÉXICO de Métodos Numéricos y Optimización

del 19 al 23 de enero de 2015
Museo de Artes Decorativas - La Habana, Cuba

Álgebra Lineal Numérica

Métodos de Interpolación y Aproximación

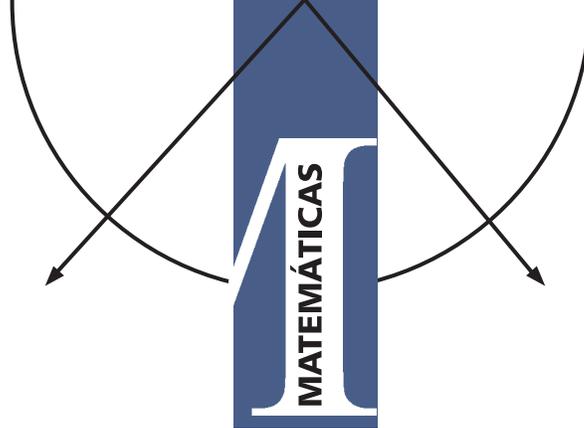
Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

Optimización no-lineal

Software para Computo Científico

<http://cubamex2015.blogspot.mx>





La divina proporción

Laura Hidalgo Solís
 Universidad Autónoma Metropolitana
 Unidad Iztapalapa

“Las ciencias y disciplinas matemáticas se encuentran en el primer grado de la certeza y la siguen todas las ciencias naturales; y sin el conocimiento de aquellas se hace imposible entender bien ninguna otra ciencia... Igualmente está escrito en la sabiduría que todo aquello que se encuentra distribuido por el universo inferior y superior se reduce necesariamente al número, peso y medida”

Fra. Luca Pacioli

En la edad media, la investigación de la belleza solía ser clasificada como una rama de la teología, pues la belleza era considerada un atributo de Dios. El investigador más notable fue San Agustín, quien dijo: *“la belleza consiste en unidad y orden que surgen de la complejidad”*. Tal orden podría ser, por ejemplo, ritmo, simetría, o simples proporciones. Pero, ¿qué debemos entender por proporción?

De acuerdo con el libro **V** de los Elementos de Euclides [4], una razón es una determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas (es decir, comparables entre sí), mientras que proporción es igualdad entre dos razones.

Consideremos ahora un segmento de recta con extremos A y B y, sobre este segmento, consideremos un punto P . Así, cabe preguntarse ¿cómo divide el punto P al segmento original?

Si a denota la longitud de AP , b la de PB y c la de AB , al considerar las combinaciones de estos tres elementos tomados de dos en dos, podemos formar las siguientes razones:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}.$$

Con estas 6 razones, podemos formar 15 proporciones, a saber, las posibles combinaciones de los 6 elementos anteriores tomados de dos en dos, como mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{c}, & \frac{a}{b} &= \frac{b}{a}, & \frac{a}{b} &= \frac{b}{c}, \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{a}, & \frac{a}{b} &= \frac{c}{b}, & \frac{a}{c} &= \frac{b}{a}, \\ \frac{a}{c} &= \frac{b}{c}, & \frac{a}{c} &= \frac{c}{a}, & \frac{a}{c} &= \frac{c}{b}, \\ \frac{b}{a} &= \frac{b}{c}, & \frac{b}{a} &= \frac{c}{a}, & \frac{b}{a} &= \frac{c}{b}, \\ \frac{b}{c} &= \frac{c}{a}, & \frac{b}{c} &= \frac{c}{b}, & \frac{c}{a} &= \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

De las soluciones a todas estas proporciones posibles tenemos las cuatro siguientes opciones: $A = P$, $B = P$, o bien, P es el punto medio de A y B , y finalmente, obtenemos una solución asimétrica de una magnitud en dos partes, es decir, P no coincide con los extremos ni con el punto medio del segmento AB . La longitud c del segmento AB se ha dividido en dos partes desiguales, de modo que el total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte menor. Euclides (325-265 a.C.) escribió, en el libro **VI** de los Elementos [4], la siguiente definición:

Se dice que un segmento de recta ha sido cortado en extrema y media razón cuando el segmento entero es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor.

Si al segmento menor le asignamos el valor de una unidad, y al mayor de x unidades, al plantear algebraicamente dicha

proporción obtenemos:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

cuya solución positiva es el número

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948482 \dots$$

conocido como número áureo o número de oro, mientras que su otra solución es

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} = 1 - \varphi \approx -0.6180339887 \dots$$

Llamaremos τ al recíproco de φ , pues es la primera letra de la palabra griega $\tau\omicron\mu\eta$ que significa corte o sección.



Figura 1: Corte áureo.

La denominación moderna para el número áureo la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en honor a Fidias (490-431 a.C.), con la letra griega φ , ya que ésta era la primera letra de Fidias escrita en griego ($\Phi\epsilon\iota\delta\acute{\iota}\alpha\varsigma$). Fidias fue el más famoso de los escultores de la Antigua Grecia, además de pintor y arquitecto. Fidias, se encuadra en la etapa conocida como “primer clasicismo griego”, diseñó las estatuas de la diosa Atenea en la Acrópolis de Atenas (Atenea Partenos, dentro del Partenón, y Atenea Promacos), y la colosal estatua sentada de Zeus en Olimpia. El honor de asignar al número áureo dicha letra se le concedió a Fidias por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas. Dicha propiedad estética ya se le atribuía por entonces también al número áureo.

El número satisface una gran cantidad de propiedades matemáticas entre las que cabe mencionar:

1. La inconmensurabilidad de φ , es decir, φ es un número irracional. Además φ es un número algebraico ya que satisface la ecuación de segundo orden con coeficientes enteros.
2. $\varphi^2 = \varphi + 1$. En general, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ para todo entero n .
3. La sucesión $\{\varphi^n\}$ es multiplicativa y aditiva a la vez, es decir, participa al mismo tiempo de la naturaleza de una progresión geométrica, $\varphi^{n+1} = \varphi \cdot \varphi^n$, y de una aditiva, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.

Luca Pacioli calificó a esta proporción como *Divina* por las correspondencias que encuentra entre ésta y la divinidad en su obra *De Divina Proportione* (La Divina Proporción [5]), publicada en Venecia en 1509. El discurso de *La Divina Proporción* puede resumirse en lo siguiente:

El arte debe reflejar, como lo haría un espejo, la estructura matemática del universo. La proporción matemática, principio universal y objetivo de belleza, debe convertirse en punto de referencia obligatorio para todo el arte

Antonio M. González Rodríguez.

Introducción. La Divina Proporción [5].

Pacioli [5], en el Capítulo V, enumera las correspondencias de semejanza que encuentra en esta proporción y Dios mismo, de las cuales mencionamos las siguientes:

La primera correspondencia: *Ella* (la proporción) es una sola y no más y no es posible asignarle otras especies ni diferencias. Dicha unidad es el supremo epíteto de Dios mismo, según toda la escuela teológica y también filosófica.

La segunda correspondencia (la de la Santa Trinidad): así como **in divinis** hay una sustancia entre tres personas, Padre, Hijo y Espíritu Santo, de igual modo una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos, y nunca de más o de menos, como se dirá.

La tercera correspondencia es que, así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a nosotros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse con cantidad racional alguna, sino que siempre es oculta y secreta y es llamada irracional por los matemáticos.

La cuarta correspondencia consiste en que, así como Dios nunca puede cambiar y está todo Él en todo y en todas partes, de igual modo nuestra proporción es siempre la misma e invariable en toda cantidad continua y discreta, grande o pequeña, y de ninguna manera puede cambiar, ni de otro modo puede aprehenderla el intelecto.

La quinta correspondencia puede añadirse no sin razón a las cuatro anteriormente citadas: así como Dios confiere el Ser a la virtud celeste, por otro nombre llamada quinta esencia, y mediante ella a los otros cuerpos simples —es decir a los cuatro elementos, tierra, agua, aire y fuego— y a través de éstos da el ser a cada una de las otras cosas de la naturaleza, de igual modo nuestra santa proporción confiere el ser formal ...

Luca Pacioli [5], en los capítulos VII al XXII, habla de los trece efectos principales de la divina proporción, esto es, de las principales propiedades matemáticas que caracterizan esta proporción, aunque, como él mismo menciona, existen posiblemente una infinidad de efectos: “... *hemos elegido solo estos trece, en honor del grupo de doce y de su jefe, nuestro Santísimo Redentor Cristo Jesús, pues, habiéndoseles atribuido el nombre de divinos, se les debe poner final con el número de nuestra salvación...*”

Para explicar los cinco primeros efectos considérese un segmento AB y sea C un corte áureo del segmento AB con $AC > CB$, y sea M el punto medio del segmento AB .

El primer efecto. “Cuando una línea se divide según la proporción que tiene el medio y dos extremos, si a su parte mayor se añade la mitad de toda la línea así proporcionalmente dividida, se sigue de modo necesario que el cuadrado de su conjunto siempre será el quíntuplo del cuadrado de dicha mitad integral.” Esto es, dado el segmento AB , si M' denota el simétrico de M con respecto al punto A , entonces:

$$(M'A + AC)^2 = 5(MB)^2.$$

El segundo efecto. “Si se tiene una cantidad dividida en dos partes y a una de ellas se le añade una cantidad tal que el cuadrado de este conjunto sea el quíntuplo del cuadrado de la cantidad agregada, se sigue necesariamente que dicha cantidad añadida es la mitad de la primera cantidad dividida en dichas dos partes, que aquella a la que se añade en su parte mayor y que toda ella está dividida según nuestra proporción. . . Y este efecto es recíproco del precedente, como se concluye en la segunda del decimotercero, geoméricamente.”

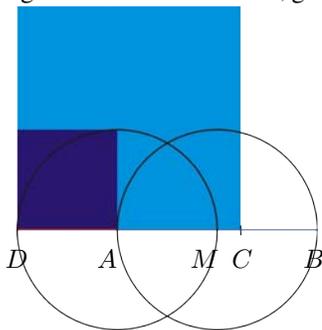


Figura 2: El segundo efecto.

Usando la notación anterior, si al segmento mayor AC le añadimos un segmento DA en forma tal que $DC = DA + AC$ y tal que

$$(DC)^2 = (DA + AC)^2 = 5(DA)^2$$

entonces

$$DA = AM = MB,$$

y C es un corte áureo de AB , como se ilustra en el diagrama (2).

Para explicar tal efecto Pacioli tomó un segmento y lo dividió en dos partes, la mayor $\sqrt{125} - 5$ y la menor $15 - \sqrt{125}$, y a la parte mayor $\sqrt{125} - 5$ le añade 5 como tercera cantidad; la suma de estas dos cantidades es $(\sqrt{125} - 5) + 5 = \sqrt{125}$, cuyo cuadrado es 125, mientras que el cuadrado de la cantidad añadida será 25. Pero $125 = 5 \times 25$ donde 25 es el cuadrado de la cantidad añadida, por tanto se cumplen las hipótesis del segundo efecto, además 5 es la mitad de la primera cantidad $10 = (\sqrt{125} - 5) + (15 - \sqrt{125})$ dividida en tales dos partes y que aquella a la cual se añadió 5 es la parte mayor de dicha primera cantidad dividida según la divina proporción.

El tercer efecto. “Si una cantidad se divide por según nuestra proporción, y a su parte menor se le añade la mitad

de la mayor, el cuadrado de la suma será siempre el quíntuplo del cuadrado de la mitad de dicha parte mayor.”

Siguiendo con la notación anterior, denotemos por G el punto medio del segmento mayor AC , es decir, $AG = GC$. Entonces:

$$(GC + CB)^2 = 5(AG)^2.$$

El cuarto efecto. “Si se divide una cantidad según nuestra divina proporción, y al total de dicha cantidad se le añade su parte mayor, entonces dicha suma y dicha parte mayor serán partes de otra cantidad dividida del mismo modo, y la parte mayor de esta segunda cantidad será siempre el total de la primera.”

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{(AB + AC)}{AB} = \frac{AB}{AC}.$$

El quinto efecto. “Si se divide una cantidad según nuestra mencionada proporción, la suma del cuadrado de la parte menor y el cuadrado del total de dicha cantidad será siempre el triple del cuadrado de la parte mayor.”

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow (CB)^2 + (AB)^2 = 3(AC)^2.$$

El sexto efecto. “Ninguna cantidad racional puede dividirse según nuestra mencionada proporción sin que cada una de sus partes sea irracional, y la llamamos residuo.”

Basta recordar que φ y $\tau = 1/\varphi$ son ambos números irracionales, y si multiplicamos cualquier número racional por alguno de ellos, obtenemos nuevamente un número irracional.

El séptimo efecto. “Si el lado de un hexágono equilátero se añade al lado del decágono equilátero, entendiéndose ambos como inscritos en un mismo círculo, su suma será siempre una cantidad dividida según nuestra mencionada proporción y la parte mayor de ésta será el lado del hexágono.”

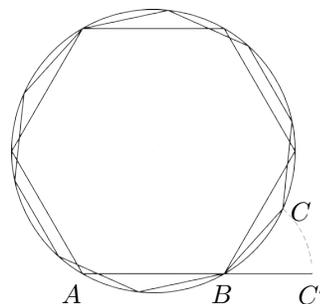


Figura 3: El séptimo efecto.

Esto es, si AB es una arista del hexágono, y BC una arista del decágono y elegimos sobre la recta AB un punto C' tal que $BC' = BC$, como se muestra en la figura (3), entonces B es un corte áureo del segmento AC' .

El octavo efecto. Es el recíproco del séptimo efecto. “Si una línea se divide según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor será siempre el lado del hexágono de aquel círculo y la menor el lado del decágono.”

Si observamos nuevamente la figura (3) podemos notar que $BC = BC'$ es la arista del decágono regular, mientras

que AB es la arista del hexágono, ambos inscritos en la misma circunferencia, y además el punto B es un corte áureo del segmento AC' .

El noveno efecto (al cual Pacioli considera el más excelso de todos). “Si en el círculo se forma el pentágono equilátero y en sus dos ángulos más próximos se trazan dos líneas rectas desde los extremos de sus lados, éstas, necesariamente, se dividirán entre sí según nuestra proporción y cada una de sus partes mayores será siempre el lado de dicho pentágono.”

En otras palabras, las diagonales del pentágono regular se dividirán siempre en extrema y media razón, y el segmento mayor de tal diagonal será paralelo al lado correspondiente del pentágono regular, como se muestra en la figura (4)

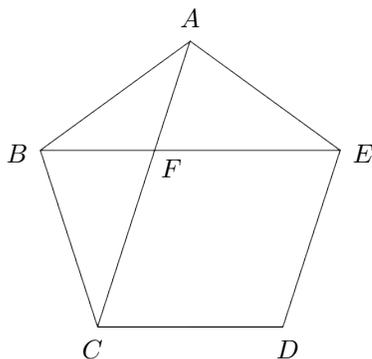


Figura 4: El noveno efecto.

El décimo efecto. “Si una cantidad se divide según la mencionada proporción, todos los efectos que de ella y de sus partes pueden resultar ocurrirán de igual modo, en hábito, número, especie y género, en cualquier otra cantidad así dividida.” En términos de φ , simplemente estamos diciendo que la sucesión $\{\varphi^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es a la vez, multiplicativa y aditiva.

El undécimo efecto. “Si se divide el lado de un hexágono equilátero según nuestra divina proporción, su parte mayor será siempre, necesariamente, el lado del decágono circunscrito por el mismo círculo del hexágono.” Véase nuevamente la figura (3).

El duodécimo efecto (al cual Pacioli llama casi incomprendible). “Si se divide una cantidad según nuestra mencionada proporción, la raíz de la suma del cuadrado de la cantidad y el cuadrado de la parte mayor será siempre, en proporción a la raíz de la suma del cuadrado de dicha cantidad y de su parte menor, como el lado del cubo es al lado del triángulo en el cuerpo de veinte bases”, ambos circundados por una misma esfera, como se muestra en la figura (5). Esto es, dado un segmento AB y C un corte áureo de AB con $AC > CB$, si r es la medida del radio de la esfera, entonces la medida de la arista del cubo circunscrito por dicha esfera es $a_c = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$, mientras que la medida de la arista del icosaedro regular circunscrito por dicha esfera es $a_i = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} r$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(AB)^2 + (AC)^2}}{\sqrt{(AB)+(CB)^2}} &= \frac{a_c}{a_i} \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} r}{\frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} r} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

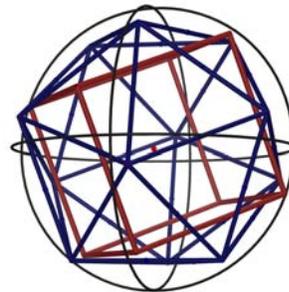


Figura 5: El duodécimo efecto.

El décimotercer efecto (al cual Pacioli denomina dignísimo). Este efecto nos dice que es imposible dibujar el pentágono regular sin la divina proporción, y “sin dicho pentágono... es imposible formar o imaginar el cuerpo más noble de entre todos los cuerpos regulares, el llamado dodecaedro”, cuya forma atribuye Platón a la quintaesencia.

Para la demostración de los efectos anteriores, Pacioli supone que el segmento total tiene una medida de 10 unidades, entonces el segmento mayor tiene una medida de $\sqrt{125} - 5$ y la menor $15 - \sqrt{125}$. Manipulando estos números logra mostrar las propiedades a las que se refiere. Para el noveno efecto supone que la medida de una de tales cuerdas, digamos AC tiene una medida de 10 y utilizando la geometría del pentágono concluye que $CF = \sqrt{125} - 5$ y $AF = 15 - \sqrt{125}$. Para los efectos que involucran el hexágono y el decágono, supone que el lado del hexágono tiene una medida de 10 unidades, y por ende, el decágono circunscrito por el mismo círculo tendrá un diámetro de 20. La demostración del décimo tercer efecto se basa en diversas proposiciones del libro de Euclides.

Pero, ¿cómo podemos dividir un segmento AB en extrema y media razón?

Euclides explica el procedimiento en la proposición 30 del libro VI de Los Elementos [4] (sobre figuras geométricas que son semejantes y proporcionales), el cual reproducimos a continuación, apoyándonos en la ilustración siguiente. Dado el segmento AB , trazamos la perpendicular BD de la misma longitud que AB , y obtenemos el punto medio C de BD . Trazamos el segmento AC . Con centro en C trazamos una circunferencia por B , y sea E el punto donde corta el segmento AC . Con centro en el punto A trazamos la circunferencia por

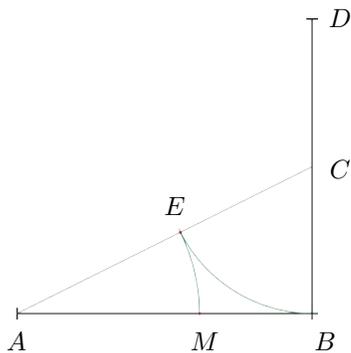


Figura 6: Construcción del corte áureo.

E , el punto M donde esta circunferencia corta el segmento AB es un corte áureo de AB .

Si consideramos un rectángulo áureo $ABCD$, es decir, un rectángulo donde el cociente de la longitud del lado mayor con respecto al menor sea φ podemos ver que la figura se divide en un cuadrado $AEFD$ y un rectángulo áureo $EBCF$, por lo que podemos continuar con este proceso indefinidamente hasta obtener un punto O . Véase la figura (7)

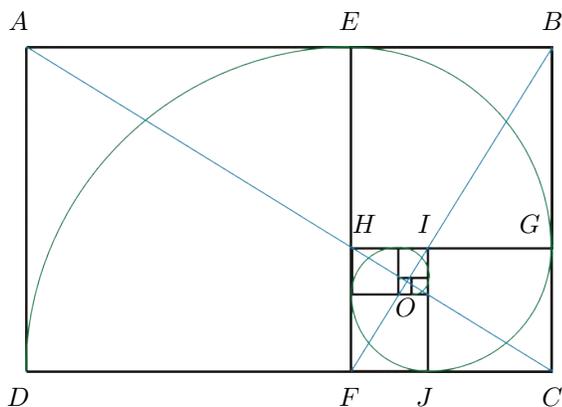


Figura 7: El rectángulo áureo y la espiral de Durero.

El punto O es el punto donde se cortan las diagonales AC y BF de los rectángulos áureos $ABCD$ y $EBCF$, cabe notar que los segmentos AC y BF son perpendiculares. Este punto se conoce con el nombre de *polo* de la espiral equiangular que pasa a través de los cortes áureos D, E, G, J, \dots

En 1525, Alberto Durero publicó su libro *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*. En este libro se describe cómo trazar con regla y compás la espiral áurea basada en la sección áurea, la cual se conoce como “espiral de Durero”. El carácter de inconmensurabilidad de la divina proporción fue causa de su restringida aplicación en las artes del Renacimiento, sin embargo, en el siglo XIX resurge el interés por estas proporciones.

Matila C. Ghyka [2] (1881-1965 d.C) fue poeta, novelista, ingeniero eléctrico, matemático, historiador, abogado, militar, diplomático y Ministro Plenipotenciario de Rumania en el Reino Unido durante los años 30's. Ghyka se destacó por su exhaustivo estudio de la proporción áurea. En su libro *Le nombre d'or: I Les rythmes - II Les rites* (El número de oro: I

Los ritmos - II Los ritos [2]) Ghyka expuso una teoría, para entonces novedosa, sobre los trazados arquitectónicos egipcios, griegos y góticos, definiendo las diferentes categorías del ritmo que se desarrollan en el tiempo y el espacio. Asimismo, muestra la transmisión continua del estudio del pentagrama pitagórico, de sus variantes y de los trazos geométricos emparentados con él, tales como el dodecaedro y el icosaedro regular y estrellado, pues todo trazado, toda proyección que represente estos cuerpos, aislados o combinados, requerirá la partición inicial de un segmento según la sección áurea.

Ghyka presentó a Salvador Dalí esta proporción y sus propiedades, lo cual crea en él un gran interés, y la aplica en varias de sus obras. En el video *Dimensión Dalí* [6], el artista Tim Phillips, comenta sobre la influencia de Ghyka sobre Dalí: “Él realmente pensaba que Ghyka había resuelto el problema de la composición geométrica. Por ejemplo, aquí hay... esto es una transcripción del diagrama de compo-

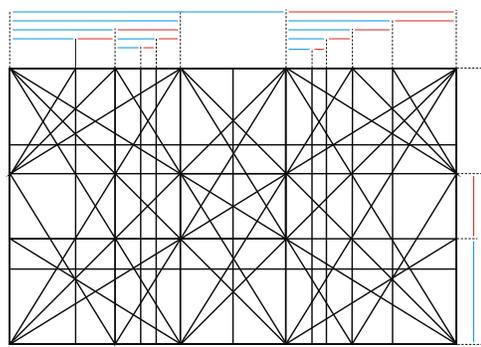


Figura 8: Descomposición armónica del rectángulo áureo [1], [2], y [6].

ción de Matila Ghyka, basado en la regla de oro, y que Dalí utilizaba continuamente. Dalí tenía una fe ciega en Ghyka y aplicaba el diagrama prácticamente para todo.”

A finales de la década de los 40, el interés de Dalí por los temas clásicos estaba cada vez más relacionado con su creciente interés por la teoría atómica, en especial con la idea de que la materia sólida se compusiese de partículas en constante cambio. *Leda atómica* (1949) está hecho mediante la técnica del óleo sobre lienzo, es de estilo surrealista y sus medidas son 61.1×45.3 cm. Se conserva en la Fundación Gala-Salvador Dalí, en Figueras, España. Esta obra combina la leyenda mitológica clásica griega de “Leda y el cisne” desde una perspectiva “atómica” del mundo que se simboliza por los objetos suspendidos en el aire imitando a los átomos que la componen y que nunca se tocan. Dalí escribió sobre esta obra: “*Todo está suspendido en el espacio, sin que ninguna cosa toque a otra. El propio mar se eleva a distancia de la tierra.*” [3]

La versión definitiva fue precedida de varios estudios a tinta china y de una pintura al óleo del mismo tema que no llegó a terminar. Con la ayuda de Ghyka, Dalí realizó complicados cálculos teóricos durante tres meses que dieron lugar a la peculiar composición del cuadro. La pintura sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que el espectador no la aprecia a

simple vista. En el boceto de 1947 se advierte la precisión del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico, el cual es una estrella de cinco puntas dibujada con cinco trazos rectos.

En la década de los 50 Dalí estaba cada vez más involucrado con la Iglesia Católica, incluso dos papas le concedieron audiencia, aunque su relación seguía siendo compleja, pues él afirmaba ser de algún modo católico y agnóstico. Relacionada con la proporción áurea, una de las obsesiones pictóricas de Dalí fue la de la figura geométrica del dodecaedro, un poliedro convexo de doce caras que son pentágonos regulares, esto es, de lados iguales y ángulos internos congruentes. Su obra maestra relacionada con ésta figura es el enorme óleo sobre lienzo de *El Sacramento de la Última Cena* (1955), en este cuadro, Dalí utilizó la proporción áurea en la razón de las dimensiones de su cuadro, que son 267 cm de largo por 166.7 cm de alto, cuyo cociente es aproximadamente $1.6016 \simeq \varphi$. En éste cuadro se muestra a Jesús con sus discípulos delante de un fondo de cuatro ventanas geométricas, a través de las cuales se puede observar nítidamente la Bahía de Port Ligart. Las cuatro ventanas geométricas corresponden a una fracción del dodecágono, esto es, doce pentágonos y doce apóstoles, como Dalí decía: “*La comunión debe ser simétrica.*”

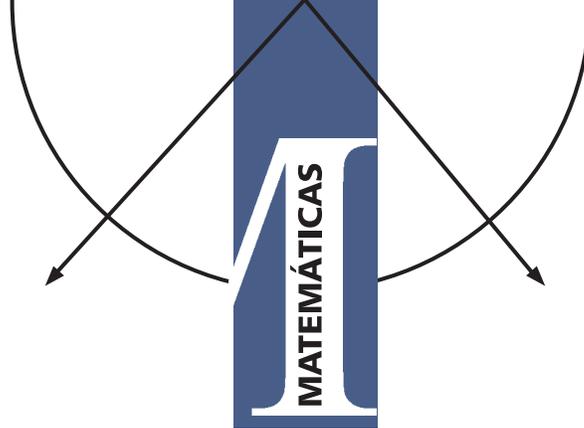
Este cuadro no recibió el reconocimiento de los críticos, Cristo no es representado como se acostumbra. Su pelo es claro y no tiene barba. Su túnica es la única que deja al descubierto su pecho. Observando con más detalle, vemos que Cristo es transparente en su parte inferior, ya que la barca que se encuentra en el paisaje puede verse a través de él.

Sobre todo el conjunto está el torso de Cristo, símbolo de la entrega al hombre, de su carne. Extiende sus brazos y al igual que el Cristo que se encuentra abajo, se difumina poco a poco. Chester Dale, benefactor y fundador de la Galería Nacional de Arte de Washington D.C. sintió gran admiración por la obra, la compró y la donó más tarde a la colección permanente de la Galería [3].

Agradecimientos. Agradezco a los doctores Héctor Juárez y Ernesto Pérez-Chavela la invitación para escribir el presente texto, así como al árbitro por sus valiosos comentarios.

Bibliografía

- [1] Matila Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, New York. Dover Pub., 1977.
- [2] Matila Ghyka, *El número de oro, I Los ritmos, II los ritos*, Barcelona, España, Editorial Poseidon, S.L. 1978.
- [3] Elizabeth Keevill y Kevin Eyres, *Dali*, primera edición, Edimat Libros S.A., Madrid-España, 2006.
- [4] Euclides, *Elementos, Libros V-IX*. Biblioteca Clásica Gredos, 191. Editorial Gredos, España, 1994.
- [5] Luca Pacioli, *La Divina Proporción*, Ediciones Akal, S.A., cuarta edición, Impreso en Madrid, España, 2008. Traducción del original de 1509.
- [6] <http://www.youtube.com/watch?v=44AOoPeu420>



¿Qué dice el teorema de Viviani?

Gasde Augusto Hunedy López

Unidad de Divulgación de la Ciencia
del CCM

ghunedu@matmor.unam.mx

Considere un triángulo equilátero, digamos el $\triangle ABC$ y coloque un punto en su interior (o en sus lados), después trace segmentos perpendiculares de recta que vayan del punto a cada uno de los lados del triángulo, sume la longitud de estos tres segmentos. Repita el proceso anterior tantas veces como considere necesario tomando en cada repetición un punto distinto al anterior. ¿Nota algo especial?

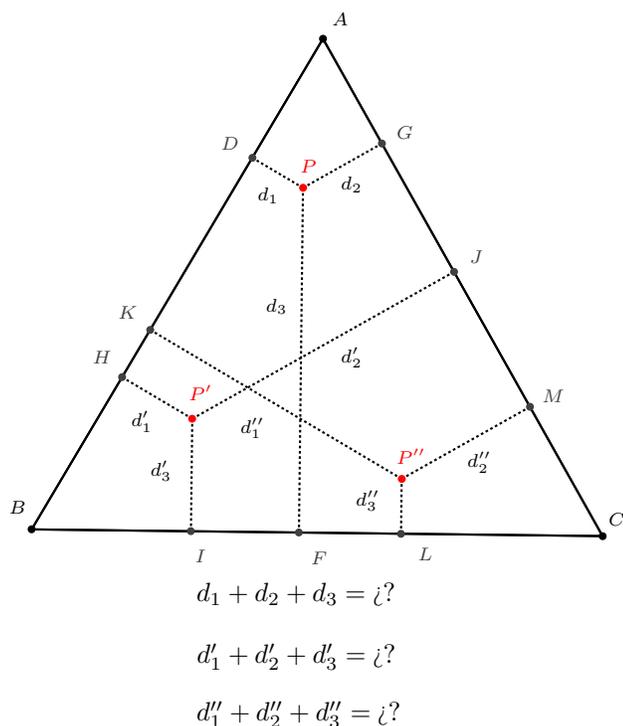


Figura 1: Triángulo equilátero $\triangle ABC$ con distintos puntos en su interior y sus respectivos segmentos perpendiculares a cada lado.

De este experimento podemos notar que la suma de los tres segmentos es independiente de donde se encuentre el punto. Este hecho fue descrito en 1659 por Vincenzo Viviani, discípulo de Galileo Galilei, quien además reconstruyó y publicó

en lengua italiana los escritos de Arquímedes y Euclides.

En lenguaje moderno el enunciado de Viviani es el siguiente:

Teorema 1 (Teorema de Viviani). Sean $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y P un punto en el interior de este (o en sus lados). Entonces, la suma de las distancias de P a los lados del $\triangle ABC$ es constante e igual a la longitud de su altura.

La importancia de este resultado no se limita únicamente a las numerosas pruebas y generalizaciones que se han hecho. Este resultado tiene importantes aplicaciones en la programación lineal y en los diagramas ternarios, además ha generado un gran interés en el campo de la docencia ya que, por una parte su planteamiento es sencillo y como veremos enseguida algunas demostraciones son fáciles y claras.

Demostración. (1^{ra})

Véase la figura 2. □

Demostración. (2^{da})

Denotemos en general el área de cualquier $\triangle ABC$ por (ABC) , la cual es: $\frac{AC \cdot h}{2}$.

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} (APC) &= \frac{AC \cdot h_b}{2} \\ (BPA) &= \frac{BA \cdot h_c}{2} \\ (CPB) &= \frac{CB \cdot h_a}{2} \end{aligned}$$

Como $(ABC) = (APC) + (BPA) + (CPB)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{AC \cdot h}{2} &= \frac{AC \cdot h_b}{2} + \frac{BA \cdot h_c}{2} + \frac{CB \cdot h_a}{2} \\ \frac{AC \cdot h}{2} &= \frac{AC \cdot h_b}{2} + \frac{AC \cdot h_c}{2} + \frac{AC \cdot h_a}{2} \end{aligned}$$

(por hipótesis el $\triangle ABC$ es equilátero)

Por lo tanto $h = h_a + h_b + h_c$.

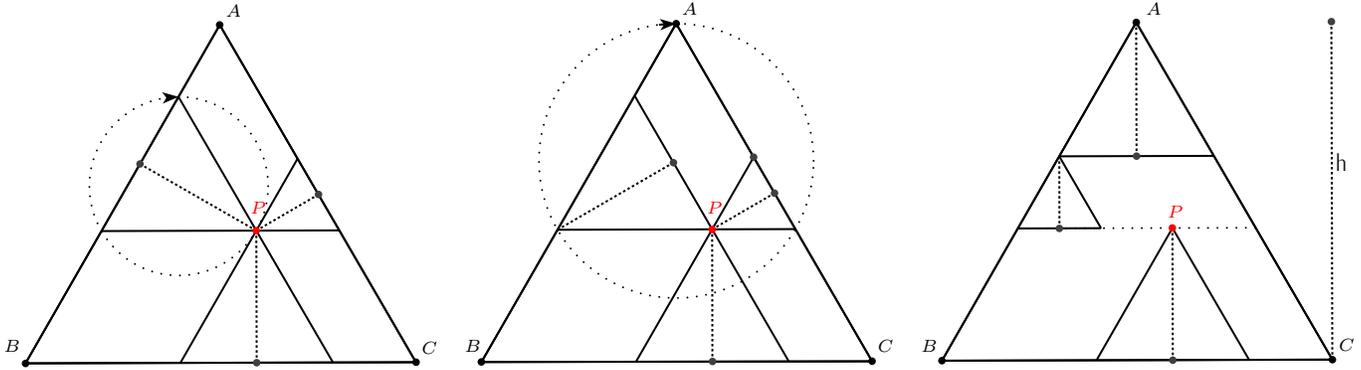


Figura 2: “Prueba sin palabras” del teorema de Viviani [4]. Los círculos punteados indican un giro de $\frac{2\pi}{3}$ en sentido horario del (o de los) triángulo(s) contenido(s).

$$\begin{aligned}
 h &= AJ = A'N + PE \\
 &= PR + PE \text{ (ya que } A'N \text{ y } PR \text{ son alturas} \\
 &\text{del } \triangle A'KP \text{ que es equilátero)} \\
 &= PD + DR + PE \\
 &= PD + PF + PE \text{ (ya que el } \triangle PFI \equiv \triangle GHK, \\
 &\text{donde } H \text{ es el pie de la perpendicular a } A'B' \text{ por } G) \\
 &= h_c + h_b + h_a
 \end{aligned}$$

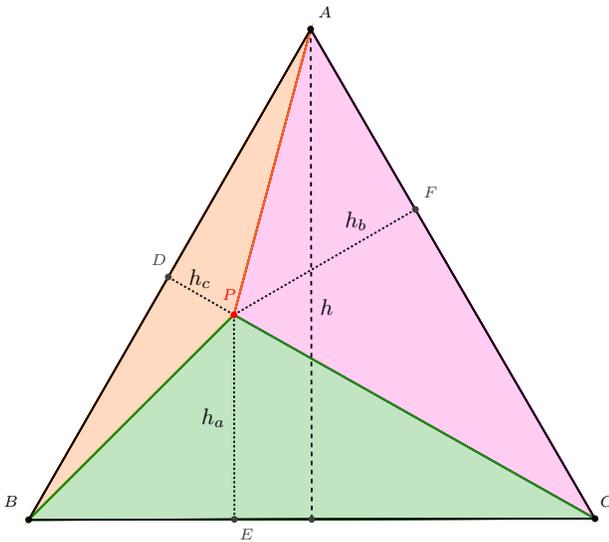


Figura 3: Prueba del teorema de Viviani mediante el cálculo de áreas.

□

Demostración. (3^{ra})

Consideremos el $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$, tal que $P \in A'C'$ y D, E y F los pies de las perpendiculares correspondientes a cada lado por el punto P . Sea l la recta paralela a $B'C'$ por P y sea $K = l \cap A'B'$, ($I = l \cap AC$). Sean N el pie de la perpendicular a l por A' y R el pie de la perpendicular a $A'B'$ por P . Entonces

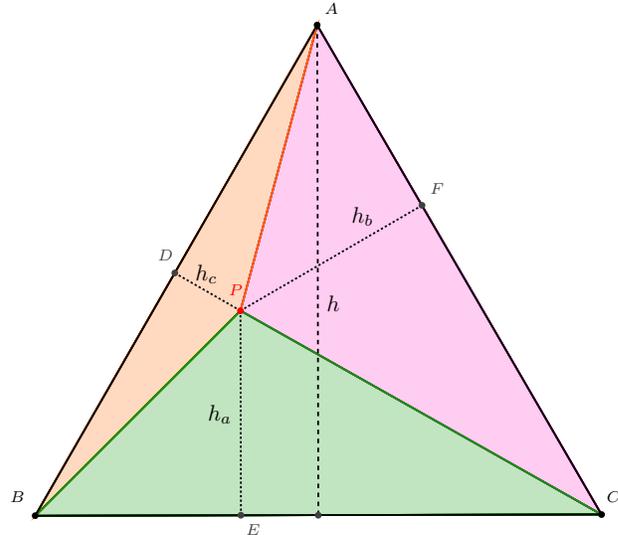


Figura 4: Prueba del teorema de Viviani con triángulos congruentes, propiedades de rectas paralelas y perpendiculares.

□

Podríamos seguir mostrando distintas pruebas al teorema de Viviani que, por cuestiones de espacio no las mencionaremos (ver por ejemplo [12]). Sin embargo, ahora nos plantearemos preguntas de la forma ¿Qué tal si...?

Una pregunta natural sería ¿Qué tal si el punto P no está en el interior del $\triangle ABC$?

Para empezar tengamos cuidado de dónde ponemos el punto P . Primero notemos lo que sucede cuando el punto se encuentra en alguna de las regiones señaladas por Z_1, Z_2 o Z_3 .

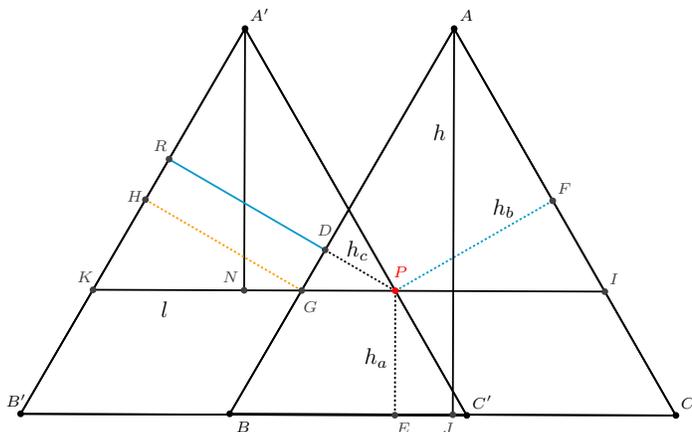


Figura 5: Caso 1: El punto P no está en el interior del $\triangle ABC$, regiones Z_1, Z_2 o Z_3 . (Idea gráfica para la demostración).

Tenemos de manera similar a la prueba (2) del teorema que:

$$(ABC) = (PAB) + (PBC) - (PAC).$$

Lo cual da por resultado: $h = h_c + h_a - h_b$. Análogamente podemos ver que esto se cumple cuando P se encuentra en las regiones Z_2 o Z_3 .

Veamos ahora qué ocurre cuando P se encuentra en las regiones Z'_1, Z'_2 o Z'_3 .

Ahora tenemos:

$$(ABC) = (PAB) - (PBC) - (PAC).$$

Lo cual da por resultado: $h = h_c - h_a - h_b$. Análogamente esto se cumple cuando P se encuentra en las regiones Z'_1 o Z'_2 .

En el caso de que P estuviera en los lados del $\triangle ABC$ o en la prolongación de ellos el resultado sigue siendo cierto y la prueba es similar a la anterior.

Ahora sí, ya estamos en condiciones para dar una generalización al teorema de Viviani, cuando el punto se encuentra fuera del $\triangle ABC$ y para verlo de una mejor forma, hablaremos de distancias positivas y negativas con la siguiente convención:

- Diremos que la distancia de un punto P localizado en el exterior de un $\triangle ABC$ a alguno de sus lados es *positiva* si el punto y el triángulo están en el mismo semiplano determinado por el lado considerado.

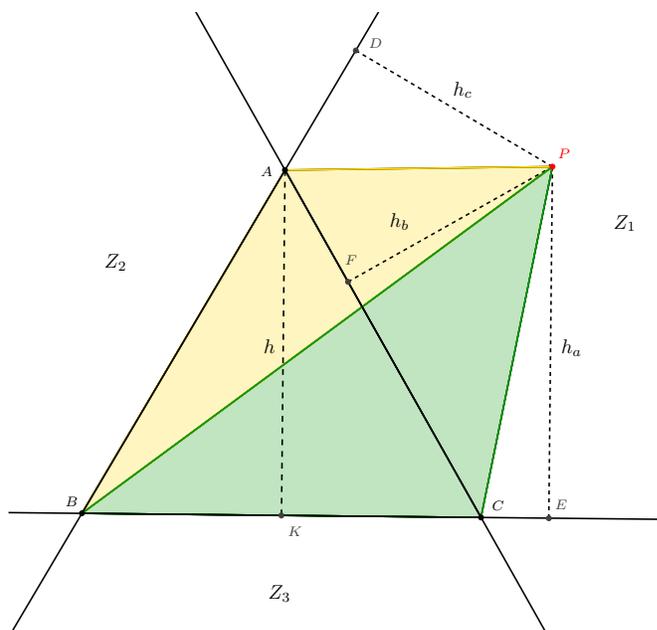


Figura 6: Caso 2: El punto P no está en el interior del $\triangle ABC$, regiones Z'_1, Z'_2 o Z'_3 . (Idea gráfica para la demostración).

- Diremos que la distancia de un punto P localizado en el exterior de un $\triangle ABC$ a alguno de sus lados es *negativa* si el punto y el triángulo están en distintos lados del semiplano determinado por el lado considerado.

Teorema 2 (Teorema generalizado de Viviani para triángulos equiláteros). Sean el $\triangle ABC$ equilátero y P un punto en el plano. Consideremos h_a, h_b y h_c las distancias signadas de P a cada uno de los lados del $\triangle ABC$ y sea h la longitud de su altura. Entonces

$$h_a + h_b + h_c = h.$$

Vayamos un poco más lejos y preguntémonos ¿Qué tal si en lugar de tomar un triángulo consideramos un cuadrado o un pentágono regular o cualquier polígono regular \mathcal{P}_n de n lados?

Como respuesta a esta pregunta, tenemos el siguiente teorema cuya demostración es análoga a la prueba (2) del Teorema de Viviani y tomando en cuenta que el área de un polígono regular es $A_{\mathcal{P}_n} = \frac{sa}{2}$, donde s el perímetro de \mathcal{P}_n y a su apotema:

Teorema 3 (Teorema generalizado de Viviani para polígonos regulares). Sean \mathcal{P}_n un polígono regular de n lados y P un punto en el plano. Si a es la apotema y h_i las distancias signadas de P a cada uno de los lados del polígono con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^n h_i = na.$$

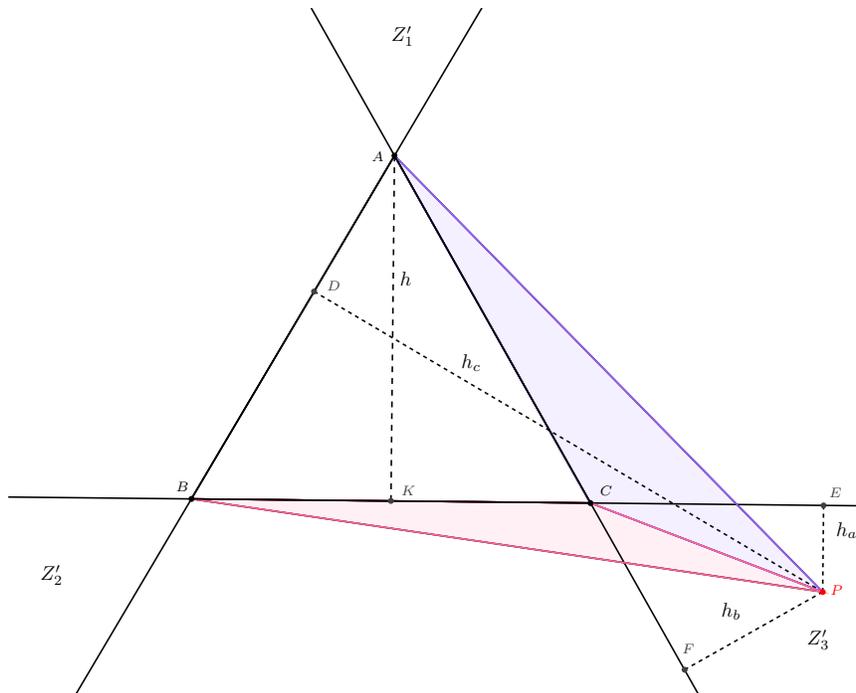


Figura 7: Idea gráfica de la demostración del teorema generalizado de Viviani para polígonos regulares aplicado a un heptágono regular \mathcal{P}_7 .

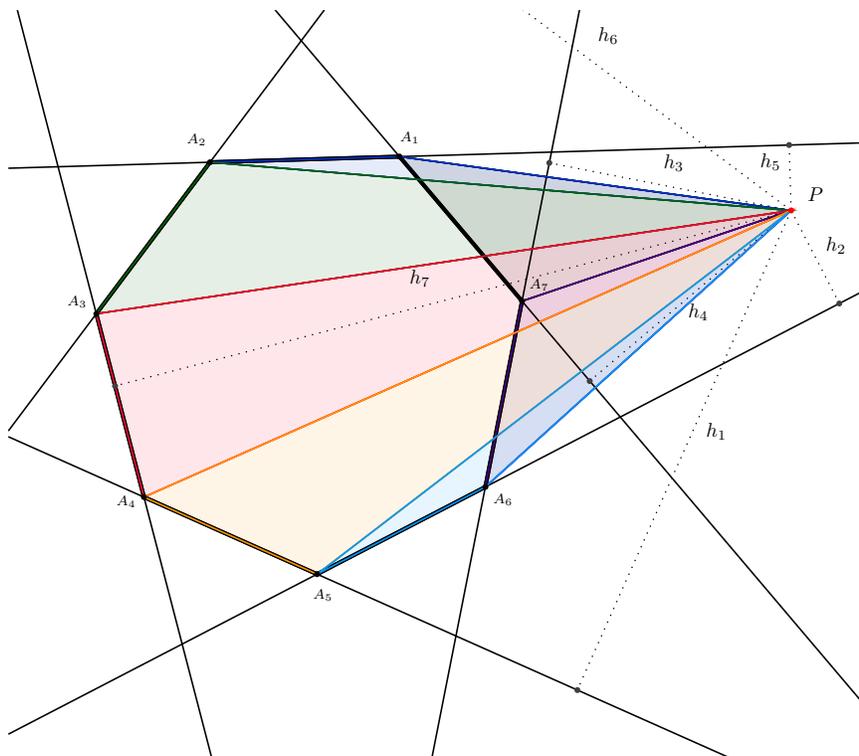


Figura 8: El teorema de Viviani para tetraedros regulares $ABCD$ (ver [1] para una demostración que no utiliza el cálculo de volúmenes).

Ya en este punto, llevemos el teorema de Viviani al espacio y ¿qué tal si ahora consideramos un tetraedro regular?

La respuesta a esta pregunta no podría ser más que satisfactoria: Aplicando nuevamente la técnica de la demostración (2), con volúmenes en esta ocasión y teniendo en cuenta que el volumen de cualquier pirámide es: $\frac{A_b h}{3}$, donde A_b es el área de la base y h la longitud del segmento perpendicular a una cara por el vértice opuesto (su altura), tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4 (Teorema generalizado de Viviani para tetraedros regulares). Sean $\triangle ABCD$ un tetraedro regular y P un punto en el espacio. Consideremos a h_a, h_b, h_c y h_d las distancias signadas de P a cada uno de las caras del $\triangle ABCD$ y sea h la longitud de alguna de sus alturas, entonces

$$h_a + h_b + h_c + h_d = h$$

Como es de esperarse, para poliedros regulares convexos tenemos nuestro equivalente del Teorema de Viviani.

A continuación dejamos algunas preguntas que pueden servir de apoyo al lector interesado para ahondar más en el tema.

- ¿Qué tal si vemos qué sucede con triángulos isósceles o escalenos?
- ¿Qué tal si analizamos lo que ocurre con polígonos arbitrarios?
- ¿Qué tal si ahora consideramos un poliedro regular no convexo o prismas?
- ¿Qué tal si lo probamos con politopos en general?
- ¿Qué tal si lo planteamos y traducimos en geometrías no euclidianas?

Otra pregunta, no menos importante que podemos incluir entre las anteriores: ¿Qué tal si analizamos el recíproco del teorema de Viviani? y ante esta cuestión aquí tenemos el siguiente:

Teorema 5 (Recíproco del Teorema de Viviani). Sea $\triangle ABC$ un triángulo, \mathbf{R} una región circular¹ para la cual la suma de las distancias de un punto P en \mathbf{R} a los tres lados del triángulo es independiente de la posición de P . Entonces el $\triangle ABC$ es equilátero.

Demostración. Sea P un punto en \mathbf{R} ; u_1, u_2 y u_3 vectores unitarios desde P tales que $u_1 \perp CA, u_2 \perp AB$ y $u_3 \perp BC$.

Sea $u = u_1 + u_2 + u_3$. Afirmamos que $u = 0$. Para verlo, supongamos que $u \neq 0$. Por hipótesis, tenemos que existe un punto P' en \mathbf{R} tal que PP' es paralelo a u . Sea $w = PP'$, y sea θ el ángulo entre w y u_1 . Además, sean h_a, h_b y h_c las distancias desde P a los lados del $\triangle ABC$, y sean h'_a, h'_b y h'_c las respectivas distancias desde el punto P' . Notemos también que por hipótesis $h_a + h_b + h_c = h'_a + h'_b + h'_c$.

¹La forma de la región no es esencial ya que una región en el plano (es decir, un conjunto abierto y conexo) contiene una región circular

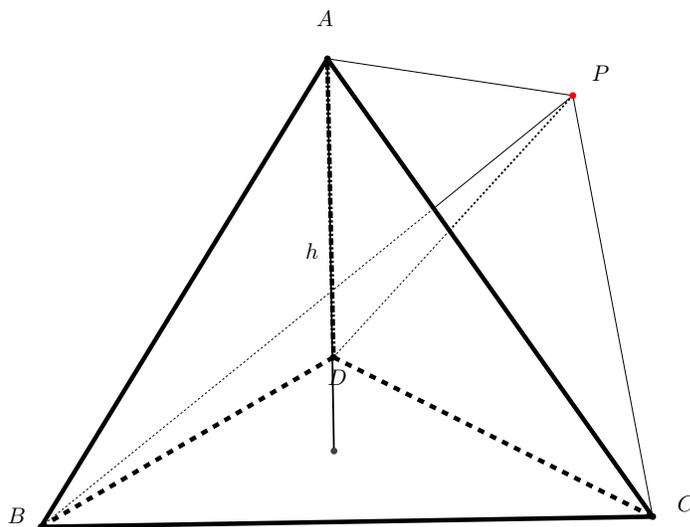


Figura 9: El recíproco del teorema de Viviani para el $\triangle ABC$.

Por un lado tenemos,

$$\cos(\theta) = \frac{h_b - h'_b}{\|w\|},$$

y por otro lado,

$$\cos(\theta) = \frac{u_1 \cdot w}{\|w\|} \quad (\text{ya que el vector } u_1 \text{ es unitario}).$$

De estas dos igualdades obtenemos: $u_1 \cdot w = h_b - h'_b$. Análogamente $u_2 \cdot w = h_c - h'_c$ y $u_3 \cdot w = h_a - h'_a$. Por lo que $w \cdot (u_1 + u_2 + u_3) = (h_a + h_b + h_c) - (h'_a + h'_b + h'_c) = 0$. Es decir, $w \cdot u = 0$, y tenemos por nuestro supuesto que estos vectores son paralelos, entonces $\|u\| = 0$!

De esto último se sigue que, para $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$u_i \cdot (u_1 + u_2 + u_3) = u_i \cdot u = 0$$

y además,

$$u_1 \cdot (u_1 + u_2 + u_3) = 1 + u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot u_3 \quad (1)$$

$$u_2 \cdot (u_1 + u_2 + u_3) = 1 + u_2 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_3 \quad (2)$$

$$u_3 \cdot (u_1 + u_2 + u_3) = 1 + u_3 \cdot u_1 + u_3 \cdot u_2 \quad (3)$$

Ahora consideremos las siguientes diferencias de las ecuaciones anteriores: (1) - (2) y (2) - (3). De aquí obtenemos, $u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3$. Notemos también que

$$\begin{aligned} 0 &= u \cdot u = (u_1 + u_2 + u_3) \cdot (u_1 + u_2 + u_3) \\ &= 3 + 2(u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot u_3 + u_2 \cdot u_3). \end{aligned}$$

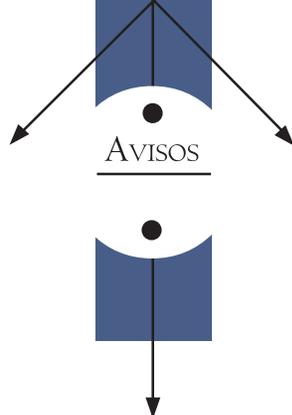
Por lo tanto, $u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = -\frac{1}{2}$, así si α es el ángulo entre los vectores u_i y u_j con $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$; $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ lo cual implica que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. De aquí deducimos (por los cuadriláteros cíclicos formados) que $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = \frac{\pi}{3}$ y por lo tanto el $\triangle ABC$ es equilátero. \square

Nuevamente las preguntas relativas al recíproco del Teorema de Viviani en sus múltiples generalizaciones se dejan al lector interesado. Sin embargo, como comentario extra (puede dejar de leer en este momento quien no este interesado en seguir con las sorpresas), cuando lo consideramos para polígonos regulares sólo es válido para triángulos, una prueba utilizando el método de la demostración anterior ayuda a convencerse de este hecho.

Hasta aquí hemos realizado un “pequeño” recorrido por el universo de preguntas y sorpresas que nos dejó Viviani, tal vez sin preverlo y con este ejemplo nos percatamos una vez más de la riqueza implícita que tiene una cuestión matemática.

Referencias

- [1] Kawasaki, Ken-Ichiroh; Yagi, Yoshihiro & Yanagawa, Katsuya; *On Viviani's Theorem in Three Dimensions*. The Mathematical Gazette, Vol. 89, No. 515 (julio 2005), pag: 283-287.
- [2] Chen, Zhibo & Liang, Tiang; *The Converse of Viviani's Theorem*. The College Mathematics Journal MAA, Vol. 37, No. 5, (noviembre 2006), pp: 390-391.
- [3] Samelson, H.; *Proof Without Words: Viviani's Theorem with Vectors*. Mathematics Magazine MAA, Vol. 76, No. 3, (junio 2003), pag: 225.
- [4] Kawasaki, Ken-Ichiroh; *Proof Without Words: Viviani's Theorem*. Mathematics Magazine MAA, Vol. 78, No. 3, (junio 2005), pag: 213.
- [5] Abboud, Elias; *On Viviani's Theorem and its Extensions*. College Mathematics Journal, Vol. 41, No. 3, (mayo 2010), 16 pages.
- [6] Gueron, Shay & Tessler, Ran; *The Fermat-Steiner Problem*. American Mathematical Monthly, Vol. 109, No. 5, (mayo 2002), pp: 443-451.
- [7] Vanderbei, Robert J.; *Linear Programming; Foundations and Extensions*. Tercera Edición, Springer, 2008.
- [8] Contreras, José N.; *Discovering and Extending Viviani's Theorem with GeoGebra*. GeoGebra International Journal of Romania, Vol. 3, No. 1, (enero 2014), 14 pages.
- [9] Contreras, José N.; *Extending Viviani's Theorem to Special Polygons Using Sketchpad*. Journal Mathematical Science and Mathematics Education, Volumen 9, Número 1, (febrero 2014), 10 pages.
- [10] Zhou, Li; *Viviani Polytopes and Fermat Points*. College Mathematics Journal, Vol. 43, No. 4, (septiembre 2012), pp: 309-312.
- [11] Bogomolny, Alexander; *Viviani in Isosceles Triangle*. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/VivianiIsosceles.shtml>
- [12] Wilson, Jim; *Equilateral Triangles and Viviani's Theorem*. The University of Georgia, Mathematics Education: <http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su07/Gilbert/EMAT206690/Viviani'sTheorem/VivianiEssay.html>



<http://epe2015.eventos.cimat.mx/>

CONVOCATORIA AL PREMIO MIXBAAL



La Sociedad Mexicana de Computación Científica y sus Aplicaciones A.C. (SMCCA) y la sección mexicana de SIAM (MEXSIAM) convocan a los profesionistas en matemáticas y ramas afines, recién titulados, a presentar su tesis o su trabajo terminal de licenciatura para el DECIMOCUARTO PREMIO MIXBAAL A LA MEJOR TESIS DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS.

<http://sociedadmatematicamexicana.org.mx/descargas/noticias/ConvocatoriaMixbaal2015.pdf>

CARTA INFORMATIVA DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA, Número 71, Agosto-Octubre del 2014, es una publicación trimestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, No. Ext. s/n, Col. San Andrés Totoltepec, C.P. 14400, Delegación Tlalpan, Distrito Federal, Tel. 58496709, <http://www.smm.org.mx>, smm@smm.org.mx. Editor responsable: Mayra Nuñez López. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-090614102900-106, ISSN: 2007-7122, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Licitud de Título y contenido No. 16036, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Permiso SEPOMEX EN TRÁMITE. Impresa por RT Grafismo, S.A. de C.V., 5 de Febrero No. 324H, Col. Obrera, México, D.F. Del. Cuauhtémoc, C.P. 06800, este número se terminó de imprimir el 31 de octubre del 2014 con un tiraje de 500 ejemplares.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Sociedad Matemática Mexicana, A.C.



CARTA INFORMATIVA

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 71,
Agosto-Octubre
del 2014
Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A. C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D. F.
Tel. +52 (55) 5849-6710 y 19
smm@smm.org.mx

JUNTA DIRECTIVA

Jorge X. Velasco Hernández
Presidente

Ricardo Cantoral Uriza
Vicepresidente

Luz de Teresa de Oteyza
Secretaria General

Daniel Olmos Liceaga
Secretario de Actas

Mariano José Juan Rivera Meraz
Tesorero

Graciela González Fariás
Secretaria de Vinculación

Mayra Nuñez López
Vocal

Alejandro R. Femat Flores
Vocal

COMITÉ EDITORIAL Y DE DIFUSIÓN

Mayra Nuñez López
(Coordinadora)

Victor F. Breña Medina
Enrique Castañeda Alvarado
Pedro González-Casanova Henríquez
Víctor Hugo Ibarra Mercado
Mario Pineda Ruelas
Luis Manuel Tovar Sánchez
Carlos E. Valencia Oleta

EDITOR TÉCNICO

Daniel Espinosa Pérez

COLABORADORES

Luz María Briseño
Daniel Espinosa Pérez

IMPRESIÓN

RT Grafismo, S. A. de C. V.
Tel. 5740 7190 / Fax 5740 7113
rtgrafismo@prodigy.net.mx

PORTADA

Aeonium tabuliforme (Wikimedia
Commons)

2a Reunión de Matemáticos Mexicanos en el Mundo



Guanajuato, Gto., del 15 al 19 de diciembre de 2014

Un evento orientado a reforzar las conexiones entre matemáticos mexicanos en todo el mundo y a contribuir a la inserción de México en las redes científicas internacionales.

Expositores

- Omar Antolín Camarena
Harvard University
- Laura Eslava
McGill University
- Nicolás Flores Castillo
Rice University
- Eduardo González
University of Massachusetts
- Adrián González Casanova Soberón
Technische Universität Berlin
- Cecilia González Tokman
University of New South Wales
- Dagmar M. Hajducek
University of Waterloo
- Jesús Hernández Hernández
Aix Marseille Université
- Rita Jiménez Rolland
Northeastern University
- César Lozano Huerta
Harvard University
- Claudio Meneses
Max-Planck - Institut für Mathematik, Bonn
- Ángela Ortega
Humboldt-Universität zu Berlin
- Jacinta Pérez Gavilán
Universität zu Köln
- Judith Pérez Velázquez
Helmholtz Zentrum München
- Ana Rechtman
Université de Strasbourg
- José Simental Rodríguez
Northeastern University
- Pablo Soberón Bravo
University of Michigan
- Mónica Torres
Purdue University
- Víctor Torres Pérez
Technische Universität Wien
- Carlos Vargas
Universität des Saarlandes

Patrocinado por



CENTRO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS



LAISLA
Laboratorio Internacional
Solomon Lefschetz

Comité Organizador

- Octavio Arizmendi Echegaray, CIMAT
- Noé Bárcenas, CCM-UNAM
- Fernando Galaz García, Karlsruher Institut für Technologie
- José Malagón, University of Toronto
- Mónica Moreno Rocha, CIMAT
- Juan Carlos Pardo Millán, CIMAT
- Rodolfo Ríos-Zertuche, Max-Planck - Institut für Mathematik, Bonn
- Pedro Solórzano, Universidade Federal de Santa Catarina

Más información en: matematicosmexicanos.org