



CARTA INFORMATIVA

No. 75
Noviembre 2015
Abril 2016

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA



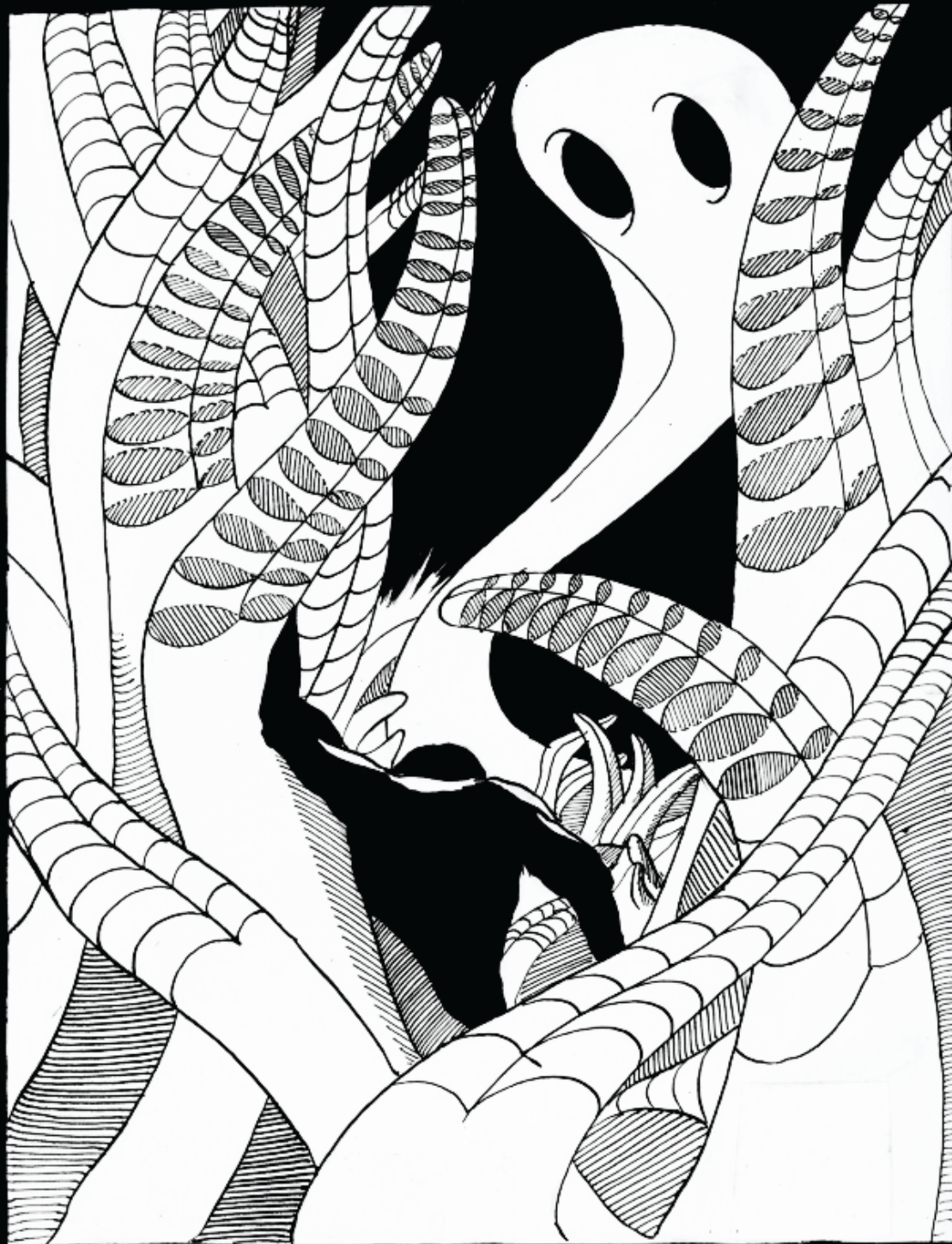
- Soluciones Aproximadas y la Teoría de Perturbaciones
- Del teorema de Ptolomeo a las álgebras de conglomerado
- Formacion de Doctores en Matemáticas II

ESCUELA DE VERANO EN MATEMÁTICAS

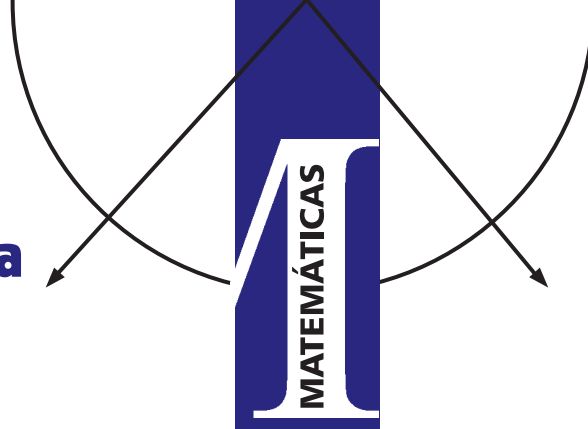
Departamento de Matemáticas CINVESTAV-IPN

JULIO 4-8, 2016

<http://www.math.cinvestav.mx/escuela2016>



Soluciones Aproximadas y la Teoría de Perturbaciones



Luis Alberto Cisneros Ake,
Departamento de Matemáticas,
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional,
cisneros@esfm.ipn.mx

La teoría gravitacional de Newton permite, en principio, determinar la órbita descrita por un cuerpo celeste en movimiento. Sin embargo, justo después de la muerte de Newton se hicieron observaciones de las trayectorias seguidas por varios cuerpos celestes — principalmente Júpiter, Saturno y la Luna— que discordaban significativamente con las predichas por la teoría de Newton. Por ejemplo, la teoría de gravitación predice que un perigeo (posición más cercana) de la Luna con respecto a la tierra se alcanza cada periodo de dieciocho años mientras que en las observaciones se encuentra que se alcanza aproximadamente ¡cada nueve años! Este tipo de situaciones “extrañas” hizo que gente como Clairaut, D’Alembert y el mismo Euler cuestionaran, en su conjunto, la validez de la teoría desarrollada por Newton, por lo que pensaban (inicialmente, principalmente Euler) que dicha teoría requería de una reformulación o corrección.

Gracias al ingenio de Clairaut se pudo establecer, al menos teóricamente en un inicio, que las discrepancias se debían a que la teoría de la gravitación daba estimaciones a primer orden y que se necesitaba considerar la aproximación al siguiente orden para “corregir” la diferencia entre la teoría y la realidad. A pesar de diferir con esta idea, Euler propone a Clairaut para un premio otorgado por la Academia de San Petersburgo en 1752. Por otro lado, y a pesar de su terquedad intelectual, Euler desarrolla en 1753 y 1772 dos trabajos sobre Teoría Lunar [1, 2] en los que desarrolla, por vez primera, métodos analíticos aproximativos que corregían las soluciones a cada orden con respecto a un parámetro pequeño de perturbación. Cabe mencionar que en dicha teoría, Euler formaliza por vez primera el problema restringido de tres cuerpos y se da cuenta de la imposibilidad de encontrar una solución general. A los trabajos de Euler le siguieron contribuciones significativas de Lagrange y Laplace [3, 4] en donde empiezan a aparecer el concepto de término secular, el cual es no acotado. Pero fue hasta años más tarde, y usando como piedra angular los trabajos de Euler sobre Teoría Lunar, que George William Hill [5] desarrolla formalmente la teoría de perturbaciones, apreciándose en todo su esplendor la magnificencia de los trabajos de Euler.

Para dar una descripción general de cómo funciona la teoría de perturbaciones consideramos dos problemas: Uno algebraico y otro diferencial. Antes de comenzar el desarrollo hecho en teoría de perturbaciones, debemos distinguir entre problemas de perturbación Regular y Singular, tenemos pues la siguiente definición.

Definición 1. Decimos que $P^\epsilon(x) = 0$ es un *problema de perturbación regular (respectivamente, singular)* en el parámetro ϵ si su solución $x(\epsilon)$ converge (respectivamente, diverge) a un valor fijo x^* cuando ϵ tiende a cero. Donde x^* satisface el problema sin perturbación, es decir, $P^0(x^*) = 0$.

El problema de perturbación $P^\epsilon(x) = 0$ puede representar una ecuación algebraica o una diferencial. El parámetro de perturbación, ϵ , en principio, se supone pequeño y representa la “corrección” a un cierto modelo de interés. Es de esperarse, por el teorema de la función implícita, que la solución al problema completo con perturbación tenga soluciones dependientes del parámetro de perturbación, esto es, $x = x(\epsilon)$. En el caso de perturbación regular se tiene que $x(0) = x^*$.

Para propósitos ilustrativos consideramos solo problemas de perturbación regular. En el caso singular debemos de “regularizar” el problema de perturbación. Es importante comentar que dichos problemas singulares son más interesantes pues exhiben, a órdenes altos de aproximación, fenomenología que queda “escondida” en el primer orden de aproximación (la cual de hecho puede dar conclusiones “absurdas” pudiendo dar lugar a “paradojas”). Podemos dar más detalles en una exposición futura.

Pensemos que tenemos el problema algebraico:

$$0 = P^\epsilon(x) = x^3 + \epsilon x + 1.$$

Notamos que en ausencia de “perturbación” $0 = P^\epsilon(x) = x^3 + 1$, la cual queda satisfecha en valores reales para $x = x_0 = -1$. Si creemos ahora que el término perturbativo ϵx “corrige” “continuamente” a la ecuación cúbica $0 = x^3 + 1$, entonces es natural pensar en una dependencia “suave” $x = x(\epsilon)$ de la solución al problema perturbado $P^\epsilon(x) = 0$. Tenemos pues que el problema perturbado completo representa

implícitamente una función diferenciable en el parámetro ϵ . Haciendo derivación implícita podemos obtener la expresión:

$$x'(\epsilon) = \frac{x(\epsilon)}{3x^2(\epsilon) - \epsilon}$$

y usando el hecho de que $x(0) = x_0 = -1$ encontramos que $x_1 = x'(0) = -\frac{1}{3}$.

Finalmente, encontramos que para perturbaciones pequeñas de ϵ , se tiene que $x = x_0 + \epsilon x_1 = -1 - \frac{1}{3}\epsilon$ es una aproximación a primer orden a la solución real de $x^3 - \epsilon x + 1 = 0$, lo cual puede corroborarse porque es posible, en este caso, resolver de manera exacta por medios algebraicos usando las fórmulas de Cardano. El lector puede verificar que la ecuación en cuestión está en su forma reducida y que se presentan dos soluciones complejas conjugadas y una real si $\epsilon^3 < \frac{27}{4}$. Todavía más, el lector puede convencerse de que la aproximación es correcta para perturbaciones pequeñas con respecto a la solución exacta:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{27}\epsilon^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27}\epsilon^3}}{2}}.$$

Una generalización del procedimiento anterior se puede inferir con ayuda del Teorema de Taylor al suponer expansiones:

$$x = x(\epsilon) = x_0 + \epsilon x_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \epsilon^n$$

como correcciones a todos los órdenes de la solución sin perturbar. Es importante hacer notar que la expansión anterior es buena por tener, de origen, un problema de perturbación regular. Los coeficientes en la expansión de Taylor anterior se obtienen al resolver de manera iterativa las ecuaciones obtenidas de igualar coeficientes con la misma potencia en el parámetro de perturbación.

Ahora consideramos el problema diferencial:

$$0 = P^\epsilon(x) = -x'(t) + \alpha x - x^2 + \epsilon \cos(t).$$

Dicho problema, en ausencia de perturbación, representa un modelo depredador-presa de una sola especie: una presa si $\alpha > 0$ o un depredador si $\alpha < 0$, que se satura (si es presa) o que se extingue (si es depredador) a un tamaño constante de población debido a factores del medio; que pueden ser efectos de otras especies (depredador o presa aparente, según sea el caso), por ejemplo. En un modelo simple de una sola especie, como el de nuestro interés, podríamos argumentar cuáles factores externos a la especie en cuestión influyen en su dinámica poblacional. Podríamos pensar, por ejemplo, que las variaciones estacionales o enfermedades influyen en la reproducción-mortandad de nuestra especie. Una suposición es que dichas variaciones son periódicas, por lo que la ecuación que gobierna la dinámica poblacional es como la supuesta en nuestro caso.

Procedemos como antes suponiendo para la solución una expansión de la forma: $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots$ e igualamos potencias de ϵ para obtener un sistema recurrente de

ecuaciones diferenciales ordinarias. Como podemos notar en la expansión, ahora los coeficientes son funciones de la variable independiente que define a la ecuación diferencial ordinaria. A primer orden, $\epsilon = 0$, es fácil resolver y encontrar que:

$$x_0(t) = \frac{\alpha}{1 + Ae^{-\alpha t}},$$

donde A es una constante que se determina al especificar un tamaño inicial de población $x(0) = x_0(0)$. En el siguiente orden de aproximación debemos resolver

$$x_1' = (\alpha - 2x_0)x_1 + \cos(t)$$

sujeto a la condición inicial $x_1(0) = 0$, para no tener dependencia de la condición inicial en el parámetro de perturbación. Podemos ver que a pesar de que la ecuación diferencial completa es no lineal, los términos perturbativos de corrección definen ecuaciones diferenciales lineales y dependientes de la solución anterior. Explícitamente la ordinaria para x_1 es:

$$x_1' + \alpha \frac{1 - Ae^{-\alpha t}}{1 + Ae^{-\alpha t}} x_1 = \cos(t), \quad x_1(0) = 0.$$

El método del factor integrante junto con la condición inicial produce:

$$x_1 = \frac{(e^{2\alpha t} - A^2)\alpha \cos(t) + ((A + e^{\alpha t})^2 + 2A\alpha^2 e^{\alpha t}) \sin(t)}{(A + e^{\alpha t})^2(1 + \alpha^2)} + \frac{(A^2 - 1)\alpha e^{-\alpha t}}{(1 + \alpha^2)(1 + Ae^{-\alpha t})^2}.$$

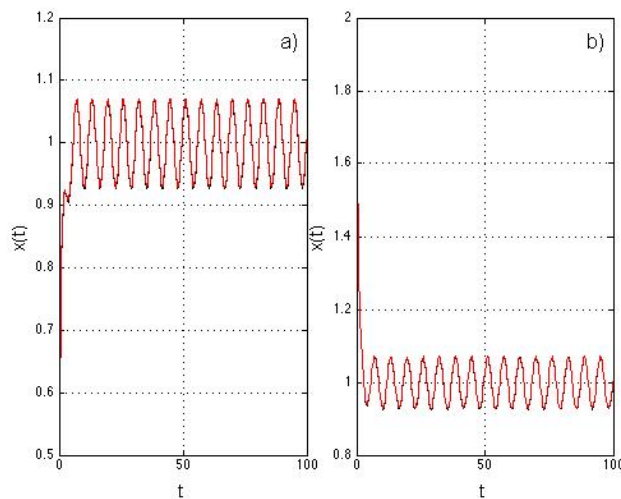


Figura 1: Solución numérica y aproximativa para el modelo de una sola especie. Los parámetros son: $\alpha = 1$, $\epsilon = 0.1$ y a) $x(0) = 0.5$ y b) $x(0) = 2$.

Tenemos pues una aproximación a primer orden $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ a la ordinaria no lineal perturbada periódicamente de nuestro modelo de una sola especie. El lector puede convencerse de que es imposible obtener una solución analítica al problema en cuestión. En la figura 1 mostramos las comparaciones entre la solución aproximada de la teoría de

perturbaciones y la solución “exacta”, obtenida por el método de Runge–Kutta de cuarto orden para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Vemos que ambas soluciones coinciden para tiempos largos a pesar de que la teoría predice un error del orden de ϵ para tiempos menores que $\frac{1}{\epsilon}$, ver teorema 2. Finalmente, comentamos que el comportamiento de la solución de nuestro ejemplo es un análogo unidimensional de un ciclo límite asintóticamente estable y remarcamos la notoriedad de la aproximación en la reproducción del transitorio inicial, amplitud y periodos de oscilación.

Concluimos nuestra exposición dando el teorema de aproximación.

Teorema 2. *Considere los problemas de valores iniciales:*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + \epsilon g(x, t; \epsilon), \quad x(t_0) = x_0$$

y

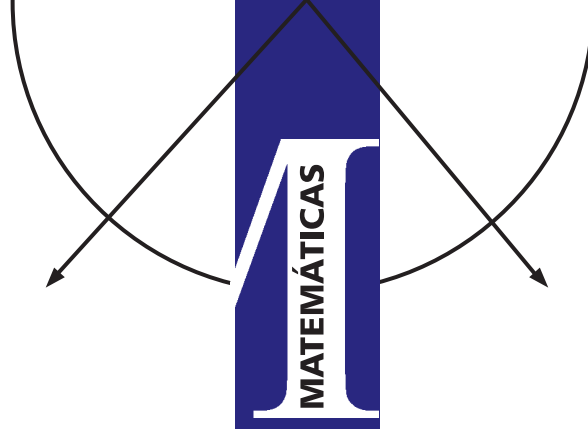
$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = x_0,$$

en las cuales f y g son Lipschitz en $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ y continuas con respecto a $(x, t\epsilon) \in D \times [t_0, \epsilon] \times (0, \epsilon_0]$. Entonces $y(t) = x_\epsilon(t) + O(\epsilon)$ para $t < \frac{1}{\epsilon}$.

Bibliografía

- [1] Theoria motuum lunae. Berlin 1753, E. 187: O.II, 23.
- [2] Theoria motuum lunae. Petersburg 1772, E. 418: O.II, 22.
- [3] Lagrange, J.-L., Mécanique Analytique (2 vols.), edition Albert Blanchard, Paris (1788).
- [4] de Laplace, S. P., Traité de Mécanique Céleste, Bachelier, Paris (1799-1825).
- [5] G. W. Hill. A new theory of Jupiter and Saturn. Astronomical Papers of the American Ephemeris and Nautical Almanac. 1890.

Del teorema de Ptolomeo a las álgebras de conglomerado



Daniel Labardini Fragoso
 Instituto de Matemáticas, Universidad
 Nacional Autónoma de México
 labardini@matem.unam.mx

El teorema de Ptolomeo, que muchos de nosotros vimos en el curso de Geometría Moderna I de la Facultad de Ciencias de la UNAM, afirma que si $M = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ es una cuaterna de puntos distintos de la circunferencia $C \subseteq \mathbb{R}^2$, y el orden de aparición de los puntos de M sobre C es dextrógiro (es decir, en el sentido de las manecillas del reloj –véase la figura 1), entonces

$$\lambda_{13}\lambda_{24} = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{23}\lambda_{14},$$

donde λ_{jk} es la longitud euclidiana del segmento de recta que une los puntos p_j y p_k .

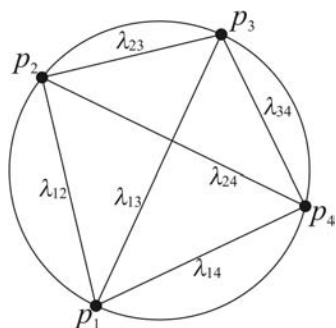


Figura 1: Configuración para el teorema de Ptolomeo en el plano Euclidiano.

El teorema de Ptolomeo es, definitivamente, un teorema de la Geometría Euclidiana. ¿Qué hay de posibles “teoremas de Ptolomeo” en Geometrías no Euclidianas, en particular la Hiperbólica? Consideremos el disco hiperbólico \mathbb{D} , cuya frontera al infinito es la circunferencia euclidiana \mathbb{S}^1 que consiste de todos los números complejos de norma 1. Tomemos una cuaterna $M = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ de puntos de \mathbb{S}^1 como en el párrafo anterior, es decir, tal que la aparición de p_1, p_2, p_3 y p_4 en \mathbb{S}^1 sea dextrógiro. Definamos $[p_j, p_k] \subseteq \mathbb{D}$ como la geodésica hiperbólica que resulta de intersectar \mathbb{D} con la única circunferencia euclidiana que es ortogonal a \mathbb{S}^1 y pasa por p_j y p_k . Queremos definir un número real λ_{jk} en términos de $[p_j, p_k]$. Ahora bien, dado que $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{S}^1$, todas las geodésicas $[p_j, p_k]$ tienen longitud hiperbólica infinita, de manera que no tiene mucho sentido definir λ_{jk} como la

longitud hiperbólica de $[p_j, p_k]$. Para poder extraer de $[p_j, p_k]$ un número real, “cortaremos” $[p_j, p_k]$ en dos puntos y consideraremos el segmento finito que resulta de hacer estos dos cortes. Nuestros “puntos de corte” no pueden ser completamente arbitrarios, pues queremos obtener una igualdad como la del teorema de Ptolomeo.

Para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, tomemos un horociclo arbitrario basado en p_j , esto es, una circunferencia euclidiana contenida en $\mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1$ y tangente a \mathbb{S}^1 en p_j ; llamemos H_j a este horociclo –véase la figura 2. Para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}$,

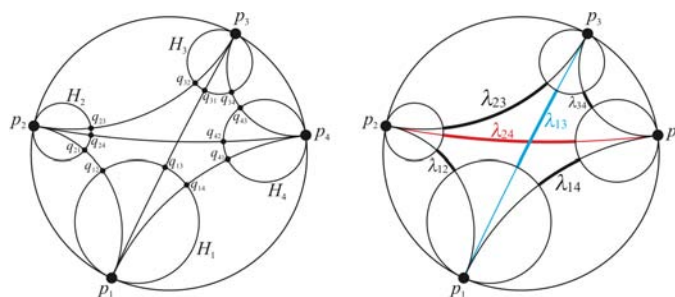


Figura 2: Configuración para el teorema de Ptolomeo en el plano hiperbólico.

el horociclo H_j intersecta $[p_j, p_k]$ en un único punto, al que denotaremos q_{jk} . Son los puntos q_{jk} los que tomaremos como “puntos de corte”. Así, para $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tales que $i \neq j$, definimos

$$\lambda_{jk} = \sqrt{e^{\ell(q_{jk}, q_{kj})}}$$

donde $\ell(q_{jk}, q_{kj})$ es la distancia hiperbólica entre q_{jk} y q_{kj} si $H_{jk} \cap H_{kj} = \emptyset$, y menos dicha distancia si $H_{jk} \cap H_{kj} \neq \emptyset$, mientras e es el conocido número real cuyo logaritmo natural es 1. El número λ_{jk} , definido inicialmente por Robert Penner, es comúnmente llamado la *longitud lambda* de $[p_j, p_k]$ con respecto a los horociclos H_j y H_k . Penner prueba que:

Teorema 1. [13] Para cualquier cuaterna $M = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ de puntos de \mathbb{S}^1 que esté ordenada de manera dextrógiro, y para cualquier elección $H = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ de horoci-

los respectivamente basados en p_1, p_2, p_3 y p_4 , las correspondientes longitudes λ satisfacen la igualdad

$$\lambda_{13}\lambda_{24} = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{23}\lambda_{14}.$$

¿Sirven las longitudes λ para algo más que hacer que se cumpla la igualdad de Ptolomeo, o son sólo el resultado de una construcción *ad hoc* sin mayores implicaciones? Para esbozar una respuesta a esta pregunta, intentaremos interpretar las longitudes λ como funciones coordenadas de cierto espacio, y la igualdad de Ptolomeo como un cambio de coordenadas correspondiente a una operación combinatoria simple.

Un *cuadrilátero ideal* es la envolvente convexa hiperbólica de la unión de las geodésicas hiperbólicas determinadas por cuatro elementos distintos de \mathbb{S}^1 , un *cuadrilátero ideal decorado* es una pareja consistente de un cuadrilátero ideal Σ y una elección de cuatro horociclos respectivamente basados en los cuatro puntos de \mathbb{S}^1 que determinan Σ . El conjunto $\text{Cuad} = \{(M, H) \mid M = (p_1, p_2, p_3, p_4) \text{ y } H = (H_1, H_2, H_3, H_4)\}$ son como en el teorema 1} ciertamente parametriza al conjunto de todos los cuadriláteros ideales decorados que tienen un vértice distinguido (siendo este vértice el primer miembro de la cuaterna ordenada M), pero la parametrización es redundante si se toma en cuenta $\text{Iso}^+(\mathbb{D})$, el grupo de las isometrías hiperbólicas de \mathbb{D} que preservan la orientación. Para deshacernos de la redundancia, introduzcamos una relación de equivalencia en Cuad como sigue: $(M, H) \sim (M', H')$ si y sólo si existe $\gamma \in \text{Iso}^+(\mathbb{D})$ tal que $\gamma(p_j) = p'_j$ y $\gamma(H_j) = H'_j$ para toda $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Encontremos una parametrización de Cuad / \sim . Puesto que Iso^+ actúa transitivamente en el conjunto cuyos elementos son las ternas ordenadas de puntos distintos de \mathbb{S}^1 cuyo orden es dextrógiro, cada clase de equivalencia de \sim contiene un elemento (M, H) tal que $M = (-i, -1, i, p_4)$. Más aun, si (M', H') es tal que $M' = (-i, -1, i, p'_4)$ con $p_4 \neq p'_4$, entonces (M, H) y (M', H') pertenecen a clases de equivalencia distintas, pues la identidad es el único elemento de Iso^+ que fija a una terna dada de puntos distintos de $\mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1$; y si $(-i, -1, i, p_4) = (-i, -1, i, p'_4)$, pero $H \neq H'$, entonces (M, H) y (M', H') pertenecen a clases de equivalencia distintas, por la misma razón. Por lo tanto, el conjunto $R = \{((-i, -1, i, e^{i\theta}), (H_1, H_2, H_3, H_4)) \mid \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ y } H_1, H_2, H_3 \text{ y } H_4 \text{ son horociclos basados en } -i, -1, i, \text{ y } e^{i\theta}, \text{ respectivamente}\}$ es un sistema de representantes de las clases de equivalencia de \sim .

Dado que el conjunto de horociclos basados en un punto dado de \mathbb{S}^1 puede ser parametrizado por $\mathbb{R}_{>0}$ (véase [13] para una parametrización explícita en términos del *cono de luz* del espacio de Minkowski \mathbb{R}^{2+1}), de lo anterior concluimos que Cuad / \sim puede ser parametrizado de manera no redundante por los puntos de $\mathbb{R}_{>0}^5$ (obsérvese que $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y $\mathbb{R}_{>0}$ son difeomorfos mediante la función $\theta \mapsto e^{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$). Ahora bien, Cuad / \sim tiene una topología natural, definible de manera *intrínseca*, que no describiremos aquí; el lector interesado puede consultar [13]. Con respecto a esta topología, la parametrización que hemos dado de Cuad / \sim por puntos de $\mathbb{R}_{>0}^5$ es un difeomorfismo. Sin embargo, de acuerdo a esta

parametrización, las funciones coordenadas $\mathbb{R}_{>0}^5 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (es decir, las proyecciones) no tienen todas la misma naturaleza, pues una de ellas corresponde a la elección de un punto en \mathbb{S}^1 , mientras que las otras cuatro corresponden a la elección de horociclos. Nuestra siguiente tarea es dar una parametrización cuyas cinco funciones coordenadas tengan la misma naturaleza.

Consideremos un cuadrado euclidiano orientado $C \subseteq \mathbb{R}^2$, con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 , ordenados de forma dextrógiro, y tomemos v_1 como vértice distinguido de C . Denotemos por x_{13} y x_{24} las dos diagonales de C . Fijemos una de ellas, digamos $x_{k\ell}$. Para cada $(M, H) \in R$, tenemos entonces las cinco geodésicas $[p_1, p_2], [p_2, p_3], [p_3, p_4], [p_4, p_1]$ y $[p_k, p_\ell]$ (donde $p_1 = -i, p_2 = -1$ y $p_3 = i$), que, con la ayuda de los horociclos en H , dan lugar a los cinco números $\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{34}, \lambda_{14}$ y $\lambda_{k\ell}$.

Teorema 2. [13] *La asignación*

$$(M, H) \mapsto (\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{34}, \lambda_{14}, \lambda_{k\ell})$$

constituye un difeomorfismo $\text{Cuad} / \sim \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^5$.

El espacio $\tilde{\mathcal{T}}(C) = \text{Cuad} / \sim$ recibe el nombre de *espacio de Teichmüller decorado* del cuadrado con un vértice distinguido. La construcción de los párrafos anteriores nos dice que Cuad / \sim puede ser intuitivamente interpretado como el conjunto de todas las formas posibles de asignar a C una métrica hiperbólica d con respecto a la que $C \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es encajable como un cuadrilátero ideal en \mathbb{D} , y a cada vértice ideal de este cuadrilátero ideal un horociclo basado en él, estando dos asignaciones identificadas si son isométricas mediante una isometría que preserva el punto distinguido v_1 . Más aun, la elección de una de las dos diagonales del cuadrado C induce la elección bien definida de una de las dos diagonales geodésicas en cada elemento de Cuad , pues en C se ha tomado un vértice distinguido, los elementos de Cuad son pares de cuaternas *ordenadas*, y la relación \sim respeta el orden de las cuaternas.

Vemos así que cada triangulación “combinatoria” de C induce una parametrización del espacio de Teichmüller decorado cuyas funciones coordenadas son longitudes λ . El teorema 1 nos dice entonces que el cambio de coordenadas inducido por la operación combinatoria que reemplaza una diagonal de C por la otra diagonal¹ está dado precisamente por la relación de Ptolomeo. En pocas palabras, la relación de Ptolomeo es un cambio de coordenadas.

¿Es posible extender los teoremas 1 y 2 a otras superficies que admiten métricas hiperbólicas? Tomemos un polígono regular euclidiano orientado $P \subseteq \mathbb{R}^2$ con n vértices, distingamos un vértice v de P y definamos el espacio de Teichmüller decorado $\tilde{\mathcal{T}}(P)$ de la misma manera que lo hicimos para el cuadrado.

Teorema 3. [13] *Cada triangulación τ de P da lugar a un difeomorfismo* $\tilde{\mathcal{T}}(P) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^{|\tau|}$ *mediante la medición de longitudes λ . El cambio de coordenadas inducido por una movida de Whitehead está dado por la relación de Ptolomeo.*

¹Esta operación es conocida como *movida de Whitehead* o *flip*.

De hecho, Sergey Fomin y Dylan Thurston prueban en [9] que el teorema 3 sigue cumpliéndose si en lugar de P tomamos una pareja (Σ, \mathbb{M}) consistente de una superficie compacta conexa orientada Σ , con frontera posiblemente vacía, y un subconjunto finito no vacío \mathbb{M} de Σ que contenga al menos un punto por cada componente conexa de la frontera de Σ (el conjunto \mathbb{M} hace las veces de conjunto de vértices, que al considerar métricas hiperbólicas se convierten en puntos ideales, tal como sucedió en el caso del cuadrado). Trabajos posteriores de Anna Felikson, Michael Shapiro y Pavel Tumarkin [7], y Leonid Chekhov y Michael Shapiro [6], han generalizado el teorema 3 a la situación que permite la presencia no sólo de puntos ideales, sino de *puntos orbifold* también.

Consideremos ahora la variedad Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$, cuyos elementos son los \mathbb{C} -subespacios vectoriales de \mathbb{C}^4 que tienen dimensión sobre \mathbb{C} de 2. Si por $R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2})$ denotamos el conjunto cuyos elementos son las matrices de tamaño 4×2 con coeficientes en \mathbb{C} que tienen rango 2, y si para cada $A = (v_A, w_A) \in R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2})$ definimos $\text{gen}(A)$ como el \mathbb{C} -subespacio vectorial de \mathbb{C}^4 generado por los dos vectores columna $v_A, w_A \in \mathbb{C}^4$ que conforman A , tenemos una función suprayectiva $\text{gen} : R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2}) \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Si $B = (v_B, w_B) \in R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2})$ es una matriz tal que $\text{gen}(B) = \text{gen}(A)$, entonces podemos escribir $v_B = \alpha_1 v_A + \alpha_2 w_A$ y $w_B = \beta_1 v_A + \beta_2 w_A$. Un cálculo extremadamente sencillo muestra que en el espacio $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}^4 \wedge \mathbb{C}^4$ sucede que

$$v_B \wedge w_B = \det(X) v_A \wedge w_A, \text{ donde } X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Si $\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ es el espacio proyectivo cuyos elementos son los \mathbb{C} -subespacios vectoriales de dimensión 1 de $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, y si por $[x]$ denotamos el \mathbb{C} -subespacio vectorial de $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ generado por un vector no nulo $x \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, entonces de la igualdad $\det(X) v_A \wedge w_A = v_B \wedge w_B$ deducimos que $[v_A \wedge w_A] = [v_B \wedge w_B]$. Esto significa que la función $R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2}) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ dada por $A \mapsto [v_A \wedge w_A]$ es constante en cada fibra de la función $\text{gen} : R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2}) \rightarrow \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$, lo que implica que hay una función $\iota : \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ con la propiedad de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)) \\ \text{gen} \downarrow & \nearrow \iota & \\ \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4) & & \end{array}$$

conmuta (concretamente, $\iota(W) = [v \wedge w]$ para cualquier base $\{v, w\}$ de $W \in \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$). Esta función ι , usualmente llamada *encaje de Plücker*, es inyectiva, pues si un elemento $W \in \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ y cualquier base (ordenada) $\{v, w\}$ de W nos son dados, entonces W coincide con el núcleo de la función \mathbb{C} -lineal $\mathbb{C}^4 \rightarrow \Lambda^3(\mathbb{C}^4)$ dada por $u \mapsto u \wedge v \wedge w$.

Para cada $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ denotemos por e_j al vector en \mathbb{C}^4 que tiene un 1 en la j -ésima coordenada y 0 en las demás, de manera que $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base estándar de \mathbb{C}^4 como \mathbb{C} -espacio vectorial. Es bien sabido que $\gamma = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ es una base

de $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ como \mathbb{C} -espacio vectorial, a la que llamaremos *base estándar de $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$* . Un sencillo cálculo similar al que establece (1) muestra que si

$$A = (v_A, w_A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \in R_2(\mathbb{C}^{4 \times 2}),$$

entonces

$$\begin{aligned} v_A \wedge w_A &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})e_1 \wedge e_2 \\ &+ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})e_1 \wedge e_3 \\ &+ (a_{11}a_{42} - a_{41}a_{12})e_1 \wedge e_4 \\ &+ (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})e_2 \wedge e_3 \\ &+ (a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22})e_2 \wedge e_4 \\ &+ (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})e_3 \wedge e_4, \end{aligned}$$

lo que significa que si para cada par $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $j < k$ definimos ω_{jk} como el determinante de la matriz de tamaño 2×2 que resulta de borrar de A los renglones diferentes de los renglones j -ésimo y k -ésimo, entonces $v_A \wedge w_A = \sum_{1 \leq j < k \leq 4} \omega_{jk} e_j \wedge e_k$. Los coeficientes ω_{jk} son usualmente conocidos como *coordenadas de Plücker* de $\text{gen}(A) \in \text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Mientras que los números ω_{jk} no están determinados de manera única por $\text{gen}(A)$, el elemento

$$[\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{34}] = \iota(\text{gen}(A))$$

del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)) = \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ sí lo está. En otras palabras, las coordenadas de Plücker de $\text{gen}(A)$ son las coordenadas homogéneas de $\iota(\text{gen}(A)) \in \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$ con respecto a la base estándar de $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$.

Mediante un cálculo muy elemental puede verificarse que

$$\omega_{13}\omega_{24} = \omega_{12}\omega_{34} + \omega_{14}\omega_{23}. \quad (2)$$

Vemos que la igualdad de Ptolomeo es satisfecha por las coordenadas de Plücker de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Si, abusando de la notación, escribimos ω_{jk} para referirnos a la función $\Lambda^2(\mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\sum_{1 \leq r < s \leq 4} \omega_{rs} e_r \wedge e_s \mapsto \omega_{jk}$, vemos que (2) es en realidad una igualdad de funciones dentro del anillo coordenado afín $\mathbb{C}[\Lambda^2(\mathbb{C}^4)] = \mathbb{C}[\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{34}]$. El hecho de que los polinomios $\omega_{13}\omega_{24}$ y $\omega_{12}\omega_{34} + \omega_{14}\omega_{23}$ son homogéneos permite interpretar (2) como una igualdad en el anillo coordenado homogéneo del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4))$.

Tomemos ahora cualquier entero $n \geq 4$. Resulta claro que todo lo que hemos dicho hasta ahora sobre $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ es válido para $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ (con las adaptaciones obvias –por ejemplo, hay que considerar $\Lambda^2(\mathbb{C}^n)$, cuya base estándar tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ elementos), incluso la igualdad (2) si interpretamos ésta sin sustituir el número 4 por n . Por otro lado, es de esperar que ahora que n es un entero arbitrario mayor que 3, las coordenadas de Plücker de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ satisfagan más relaciones además de la dada en (2). El hecho de que el teorema de Ptolomeo vale para cualquier cuadrilátero inscrito en una circunferencia nos sugiere hacer lo siguiente. Tomemos un polígono regular euclidiano orientado $P \subseteq \mathbb{R}^2$ con n vértices,

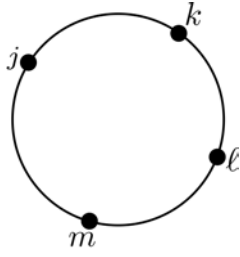


Figura 3: Cuatro vértices de P .

y etiquetemos sus vértices dextrógiramente con los números $1, 2, \dots, n$. Los segmentos de recta que conectan parejas de vértices de P están biyectivamente parametrizados por el conjunto $\Delta = \{(j, k) \mid 1 \leq j < k \leq n\}$ mediante la regla que a cada $(j, k) \in \Delta$ asigna el segmento de recta que conecta los vértices de P etiquetados con los números j y k ; abusando de la notación, escribiremos (j, k) o (k, j) para referirnos al segmento de recta correspondiente. Con este abuso notacional, observamos que cada elemento de Δ es un *lado* o una *diagonal* de P .

Tomemos 4 vértices de P , digamos j, k, m, ℓ , y supongamos que la aparición de éstos es dextrógira, como en la figura 3. Definamos $\omega_{rs} = -\omega_{sr}$ si $1 \leq s < r \leq n$. El mismo cálculo elemental que establece (2) muestra entonces que $\omega_{jm}\omega_{k\ell} = \omega_{jk}\omega_{m\ell} + \omega_{km}\omega_{\ell j}$. Considerando todas las posibles elecciones de j, k, m, ℓ , vemos que hemos encontrado una colección de polinomios que se anulan en todo elemento elemento de la forma $v_A \wedge w_A$ con $A \in R_2(\mathbb{C}^{n \times 2})$, a saber, la colección

$$S = \{\omega_{jk}\omega_{m\ell} + \omega_{km}\omega_{\ell j} - \omega_{jm}\omega_{k\ell} \mid \text{los vértices } j, k, m, \ell \text{ de } P \text{ aparecen como en la figura 3}\} \\ \subseteq \mathbb{C}[\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)] = \mathbb{C}[\omega_{rs} \mid 1 \leq r < s \leq n].$$

El hecho de que todos los elementos de S son homogéneos nos dice entonces que los elementos de S se anulan

$$\iota(\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)).$$

El siguiente resultado es bien conocido, el lector puede encontrar una prueba en [15].

Teorema 4. *La imagen de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ bajo el encaje de Plücker ι coincide con el subconjunto de $\mathbb{P}(\bigwedge^2(\mathbb{C}^n))$ que consiste precisamente de los ceros de S . El anillo coordenado homogéneo $\mathbb{C}[\iota(\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n))]$ es un dominio entero. Consecuentemente, $\iota(\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n))$ es una variedad proyectiva irreducible.*

Como ι es inyectiva, podemos usar este teorema para ver $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ como variedad proyectiva irreducible. De esta manera, $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ tiene su anillo coordenado homogéneo $\mathbb{C}[\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)]$.

Fijemos una triangulación arbitraria σ de P , el anillo de polinomios en $|\sigma| = 2n - 3$ indeterminadas,

$$\mathbb{C}[\sigma] = \mathbb{C}[x_{jk} \mid (j, k) \in \sigma],$$

y el correspondiente campo de funciones racionales $\mathbb{C}(\sigma) = \mathbb{C}(x_{jk} \mid (j, k) \in \sigma)$. Dada cualquier triangulación τ de P , es posible encontrar una sucesión finita

$$(\tau_0 = \sigma, \tau_1, \dots, \tau_{r-1}, \tau_r = \tau)$$

de triangulaciones de P con la propiedad de que τ_{s-1} y τ_s están relacionadas por una movida de Whitehead para $s \in \{1, \dots, r\}$. Digamos que $\tau_s = (\tau_{s-1} \setminus (k_s, \ell_s)) \cup \{(j_s, m_s)\}$, y definamos funciones racionales $x_{j_s m_s} \in \mathbb{C}(\sigma)$ mediante la regla recursiva

$$x_{j_s m_s} = \frac{x_{j_s k_s} x_{m_s \ell_s} + x_{k_s m_s} x_{\ell_s j_s}}{x_{k_s \ell_s}}, \quad (3)$$

donde j_s, k_s, m_s, ℓ_s son los vértices, ordenados dextrógiramente, del cuadrilátero de τ_{s-1} en el que (j_s, m_s) aparece como diagonal. Resultados de Fomin-Shapiro-Thurston [8] permiten mostrar que la función racional $x_{j_r m_r}$ está determinada por la diagonal (j_r, m_r) , es decir, que no depende de la triangulación τ a la que pertenece ni de la sucesión $(\tau_0 = \sigma, \tau_1, \dots, \tau_{r-1}, \tau_r = \tau)$ que conecta a σ con τ mediante movidas de Whitehead.

Teorema 5. [11, Ejemplos 12.4 y 12.6, y Proposición 12.7] *El anillo coordenado homogéneo $\mathbb{C}[\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)]$ es isomorfo a la \mathbb{C} -subálgebra de $\mathbb{C}(\sigma)$ generada por el conjunto $\mathcal{X} = \{x_{jk} \mid (j, k) \text{ es diagonal de } P\} \cup \{x_{jk} \mid (j, k) \text{ es lado de } P\}$.*

Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky han introducido en [10, 11, 12, 3] las *álgebras de conglomerado*. A muy grandes rasgos, para $A \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}\}$, un álgebra de conglomerado está definida como la A -subálgebra que dentro de un campo de funciones racionales apropiado genera un conjunto \mathcal{X} de funciones racionales cuyos elementos son producidos por una regla recursiva similar a la definida en (3), regla a la que Fomin-Zelevinsky llaman *mutación*. En la terminología de Fomin-Zelevinsky, el teorema 5 afirma que el anillo coordenado homogéneo de la Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ es un álgebra de conglomerado.

Usando una parametrización de las coordenadas de Plücker de la Grassmanniana $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ que refina la parametrización que aquí hemos dado en términos de diagonales de polígonos en el caso $k = 2$, J. Scott muestra en su tesis doctoral [14] que para cualquier $n \geq 5$ y cualquier $k \in \{2, \dots, n\}$, el anillo coordenado homogéneo de $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es un álgebra de conglomerado.

La sección *What is...?* de la revista *Notices of the AMS* ha publicado la nota [16], en la que Andrei Zelevinsky da una breve descripción de los ingredientes que conforman la definición de álgebra de conglomerado. Tras menos de 15 años de su invención, las álgebras de conglomerado han tenido apariciones en una gran cantidad de áreas de la Matemática² e incluso en la Física Teórica³.

²Por ejemplo: teoría de representaciones, teoría de Lie, sistemas integrables, geometría de Poisson, geometría simpléctica, geometría algebraica conmutativa y no conmutativa, simetría especular, KP-solitones, 3-variedades hiperbólicas y teoría de Teichmüller.

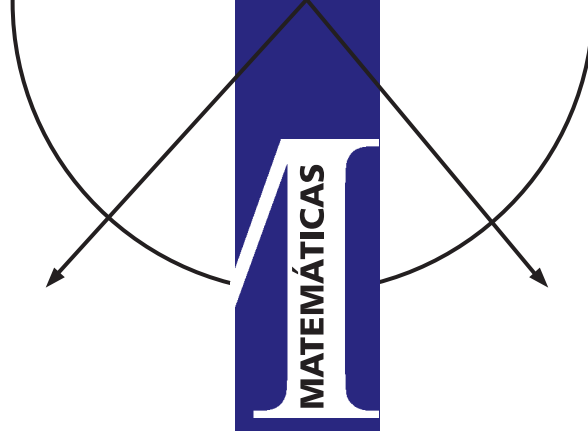
³Más específicamente: teoría de cuerdas, teorías cuánticas de campos, véase, por ejemplo, [1, 2, 4, 5]

Nota. En lo referente a las coordenadas y relaciones de Plücker y a su vínculo con la combinatoria de las triangulaciones de polígonos, hemos basado parte de nuestra exposición en la nota expositoria [15].

Bibliografía

- [1] Muram Alim, Sergio Cecotti, Clay Cordova, Sam Espahbodi, Ashwin Rastogi, Cumrun Vafa. *BPS Quivers and Spectra of Complete $N=2$ Quantum Field Theories*. Communications in Mathematical Physics, Vol. 323 (2013), Issue 3, 1185–1227. arXiv:1109.4941
- [2] Muram Alim, Sergio Cecotti, Clay Cordova, Sam Espahbodi, Ashwin Rastogi, Cumrun Vafa. *$N=2$ Quantum Field Theories and Their BPS Quivers*. Adv. Theor. Math. Phys. 18 (2014) 27–127. arXiv:1112.3984
- [3] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, Andrei Zelevinsky. *Cluster algebras III: Upper bounds and double Bruhat cells*. Duke Mathematical Journal 126 (2005), No. 1, 1–52. arXiv:math/0305434
- [4] Sergio Cecotti. *Categorical Tinkertoys for $N=2$ Gauge Theories*. Int. J. of Modern Physics A (Particles and Fields; Gravitation; Cosmology) Vol. 28 (2013), Issue 05, No. 06. arXiv:1203.6734
- [5] Sergio Cecotti, Michele del Zotto. *Galois covers of $N=2$ BPS spectra and quantum monodromy*. arXiv:1503.07485
- [6] Leonid Chekhov, Michael Shapiro. *Teichmüller spaces of Riemann surfaces with orbifold points of arbitrary order and cluster variables*. International Mathematics Research Notices (2014) 2014 (10): 2746–2772. doi: 10.1093/imrn/rnt016 arXiv:1111.3963
- [7] Anna Felikson, Michael Shapiro, Pavel Tumarkin. *Cluster algebras and triangulated orbifolds*. Advances in Mathematics Vol. 231, Issue 5, December 2012, 2953–3002. arXiv:1111.3449
- [8] Sergey Fomin, Michael Shapiro, Dylan Thurston. *Cluster algebras and triangulated surfaces, part I: Cluster complexes*. Acta Math. 201 (2008), no. 1, 83–146. arXiv:math/0608367
- [9] Sergey Fomin, Dylan Thurston. *Cluster algebras and triangulated surfaces, Part II: Lambda lengths*. arXiv:1210.5569
- [10] Sergey Fomin, Andrei Zelevinsky. *Cluster algebras I: Foundations*. Journal of the American Mathematical Society 15 (2002), no. 2, 497–529. arXiv:math/0104151
- [11] Sergey Fomin, Andrei Zelevinsky. *Cluster algebras II: Finite type classification*. Inventiones mathematicae 154 (1): 63–121. arXiv:math/0208229
- [12] Sergey Fomin, Andrei Zelevinsky. *Cluster algebras IV: Coefficients*. Compositio Mathematica 143 (2007), 112–164. arXiv:math/0602259
- [13] Robert Penner. *Decorated Teichmüller Theory*. The QGM Master Class Series, European Mathematical Society, 2012.
- [14] J. Scott. *Grassmannians and cluster algebras*. Proceedings of the London Mathematical Society (2006) 92 (2): 345–380. doi: 10.1112/S0024611505015571 arXiv:math/0311148
- [15] Daping Weng. *Plücker embedding of Grassmannian and a toy example of cluster algebra*. Nota expositoria, disponible en <http://yale.academia.edu/DapingWeng>
- [16] Andrei Zelevinsky. *What is... a Cluster Algebra?* Notices of the American Mathematical Society, Vol. 54, No. 11, 1494–1495. Disponible en <http://www.ams.org/notices/200711/tx071101494p.pdf>

Formación de Doctores en Matemáticas II



Lino F. Reséndis O.

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Azcapotzalco

lfro@correo.azc.uam.mx

El 14 de marzo de 2016 se otorgó el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas a Leonardo Ramiro Laura Guarachi, dentro del programa conjunto UNAM–UMSNH. La graduación de este nuevo doctor se reviste de un hecho singular porque se trata de la vigésima tesis doctoral que dirige el Dr. Onésimo Hernández–Lerma, Investigador Nacional Emérito (SNI) y también Investigador Emérito del Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN, su centro de trabajo desde el año 1978.

Para tener una idea de lo que significa que un solo profesor haya dirigido 20 tesis doctorales, podemos mencionar que desde la fundación del Cinvestav–IPN en 1961 hasta abril de 2016 se han graduado en total 105 doctores en matemáticas. Esto dice que 20 tesis de doctorado equivalen a un poco más del 19 % de los doctorados en matemáticas otorgados por el Cinvestav. Cabe destacar que adicionalmente a estos veinte alumnos graduados de doctorado, el Dr. Hernández–Lerma ha supervisado 40 estudiantes de maestría. Esto ha redundado en que algunas de las áreas de investigación cultivadas por el Dr. Hernández–Lerma, como son el Control estocástico y la Teoría de juegos dinámicos, estén en pleno crecimiento en México. La labor del Dr. Hernández–Lerma a través de su trabajo de investigación y el de sus alumnos tiene un impacto profundo a nivel nacional e internacional.

En una Carta Informativa de la Sociedad Matemática Mexicana de noviembre 2001 se daba cuenta de un hecho similar. En aquella ocasión, el Dr. Hernández–Lerma graduaba a su décimo tesista de doctorado; el primero, Rolando Cavazos Cadena, se había graduado en 1985. Casi el mismo lapso de tiempo fue necesario para informar de este nuevo hecho. Para quienes le conocen desde hace tiempo sigue llamando la atención la vitalidad que transmite el profesor Hernández–Lerma, quien parece intocable por el paso del tiempo, y donde el ritmo con que ha graduado a sus estudiantes es testigo de lo ya dicho.

Aún para los parámetros de la comunidad matemática internacional es muy encomiable la dirección de tal número de tesis, donde incluso dos de ellas han sido merecedoras al premio Weizmann en Ciencias Exactas y dos de sus ex-alumnos ya tienen Nivel 3 en el SNI. Estas tesis son un referente de

la exigencia de trabajo y compromiso que el Dr. Hernández–Lerma pide a sus estudiantes y a sí mismo. Disciplina que si bien ha servido para encaminar exitosamente en la investigación a muchos de sus doctorados, también ha dejado en el camino a varios de ellos según reconoce, con cierto dejo de sinsabor, el Dr. Hernández–Lerma. Sin embargo, también menciona que ha tenido estudiantes sobresalientes cuya investigación ha sido concluida en un tiempo notablemente corto, donde ha sido la escritura y revisión de la tesis lo que absorbió más tiempo a sus estudiantes.

Ante la pregunta de que si el asesor es quien escoge al estudiante, se queda momentáneamente pensativo. Finalmente concluye que es el estudiante quien escoge al asesor y opina que esa decisión queda determinada por el interés particular de cada estudiante. Sin embargo, la seriedad y la capacidad del asesor es un polo de atracción que da seguridad al estudiante empeñoso de que podrá concluir satisfactoriamente su formación doctoral.

Desde su óptica, la mayoría de los estudiantes con licenciatura y aún con maestría, y que deseen obtener un doctorado no se deben condicionar por la rama o ramas de las matemáticas que hayan abordado o no con anterioridad. Es de sabios cambiar de opinión, pero sobre todo de apasionarse por lo que se desea estudiar; este ingrediente, el tesón y la adecuada dirección de un asesor podrán culminar con éxito en una línea de estudio que el estudiante realmente ha elegido convencidamente. Dicho de otra forma, en un estudio doctoral se puede elegir una opción no contemplada hasta el momento y aún así tener éxito. Este ha sido el caso de algunos de sus estudiantes, donde la solidez como investigador del Dr. Hernández–Lerma ha sido parte fundamental en la formación de éstos.

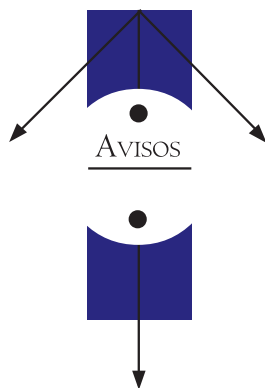
Ciertamente el logro de haber ya dirigido 20 tesis doctorales va entrelazado con veinte personas, dos de ellas mujeres, que tomaron el riesgo y fortuna de trabajar bajo la dirección del Dr. Hernández–Lerma y que sin su esfuerzo no hubiera sido posible escribir estas líneas. Enhorabuena a todos ellos y ellas también.

En la ya mencionada Carta Informativa del año 2001 se enumeró la lista de los primeros 10 graduados. Presentamos ahora la lista completa y así algunos lectores podrán reco-

nocer a quien haya sido o sea su actual profesor de análisis, probabilidad, álgebra o cálculo, como uno de los graduados de quien recibió el Premio Nacional de Ciencias y Artes en 2001, el máximo galardón académico que otorga el gobierno de México.

Graduados de doctorado

1. Rolando Cavazos Cadena, 1985
2. Roberto S. Acosta Abreu, 1987
3. Sergio O. Esparza, 1989
4. Daniel Hernández Hernández, 1993
5. Raúl Montes de Oca Machorro, 1994
6. Fernando Luque Vásquez, 1997
7. Oscar Vega Amaya, 1998
8. Juan González Hernández, 1998
9. César E. Villareal Rodríguez, 1998
10. J. Rigoberto Gabriel Argüelles, 2000
11. Raquiel R. López Martínez, 2001
12. Jorge Álvarez Mena, 2002
13. Guadalupe Carrasco Licea, 2003
14. Mario A. Villalobos Arias, 2005
15. Héctor Jasso Fuentes, 2007
16. Armando F. Mendoza Pérez, 2008
17. Beatriz A. Escobedo Trujillo, 2011
18. José Daniel López Barrientos, 2012
19. David González Sánchez, 2012
20. Leonardo R. Laura Guarachi, 2016



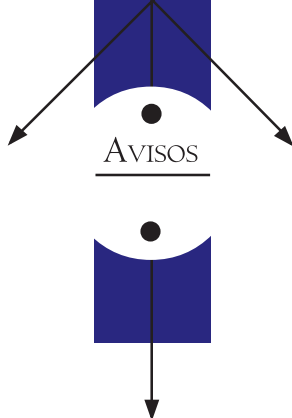
Noveno Concurso de Problemas para las Olimpiadas de Matemáticas

LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA A TRAVÉS DEL COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS INVITA A TODOS LOS MIEMBROS DE LA COMUNIDAD MATEMÁTICA DEL PAÍS (ESTUDIANTES, INVESTIGADORES, PROFESORES) A ENVIAR PROBLEMAS PARA PARTICIPAR EN EL NOVENO CONCURSO NACIONAL DE PROBLEMAS PARA LAS OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS.

BASES

- 1.- Los problemas para el concurso deberán versar sobre algunos de los temas siguientes: geometría, teoría de números, combinatoria o álgebra.
- 2.- Los problemas podrán ser utilizados en los exámenes correspondientes a las olimpiadas: Iberoamericana, Centroamericana y del Caribe, Internacional, Cuenca del Pacífico o del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
- 3.- Los problemas deberán ser inéditos y no podrán hacerse públicos antes de diciembre del año 2018, ya que podrán ser utilizados en cualquiera de las olimpiadas mencionadas en el punto 2, durante las olimpiadas de 2017 o 2018.
- 4.- Los problemas deberán ser enviados, junto con sus soluciones, al correo: valdez@uaem.mx, antes del **31 de agosto del 2017**.
5. Los formatos en los que se recibirán son: archivo PDF (con su respectivo archivo LATEX) o archivo Word. Problemas diferentes deberán ir en hojas diferentes y las hojas sin ninguna identificación personal o de la institución a la que pertenezca.
- 6.- Se otorgarán los premios siguientes:
 - Primer lugar: \$5,000 (cinco mil pesos)**
 - Segundo lugar: \$ 3,000 (tres mil pesos)**
 - Tercer lugar: \$2,000.00 (dos mil pesos)**
 - Problemas que no queden en alguno de los lugares anteriores pero que sean seleccionados para formar parte del examen de alguna de las olimpiadas mencionadas en el punto no. 2 \$1,500.00 (mil quinientos pesos)**

Atentamente:
Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas



CARTA INFORMATIVA DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA, Número 75, Noviembre 2015-Abril 2016, es una publicación semestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, No. Ext. s/n, Col. San Andrés Totoltepec, C.P. 14400, Delegación Tlalpan, Distrito Federal, Tel. 58496709, <http://www.smm.org.mx>, smm@smm.org.mx. Editor responsable: Edgar Possani Espinosa. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-090614102900-106, ISSN: 2007-7122, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Licitud de Título y contenido No. 16036, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Permiso SEPOMEX EN TRÁMITE. Impresa por RT Grafismo, S.A. de C.V., 5 de Febrero No. 324H, Col. Obrera, México, D.F. Del. Cuauhtémoc, C.P. 06800, este número se terminó de imprimir el 15 de mayo del 2017 con un tiraje de 500 ejemplares.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial de los contenidos e imágenes de la publicación sin previa autorización de la Sociedad Matemática Mexicana, A.C.



CARTA INFORMATIVA

DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 75,
Noviembre 2015
Abril 2016
Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A. C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D. F.
Tel. +52 (55) 5849-6710 y 19
smm@smm.org.mx

JUNTA DIRECTIVA

Gelasio Salazar Anaya
Presidente

Natalia García Colín
Vicepresidenta

Edgar Possani Espinosa
Secretario

Octavio Arizmendi Echegaray
Tesorero

Mucuy-kak Guevara Aguirre
Secretaria de Actas

Brenda Tapia Santos
Secretaria de Vinculación

Onésimo Hernández Lerma
Vocal

Salvador Pérez Esteva
Vocal

COMITÉ EDITORIAL Y DE DIFUSIÓN

Edgar Possani Espinosa
(Coordinador)

Enrique Castañeda Alvarado
Onésimo Hernández Lerma
Victor Hugo Ibarra Mercado
Mayra Nuñez López
Salvador Pérez Esteva
Luis Manuel Tovar Sánchez
Carlos Enrique Valencia Oleta

EDITOR TÉCNICO

Daniel Espinosa Pérez

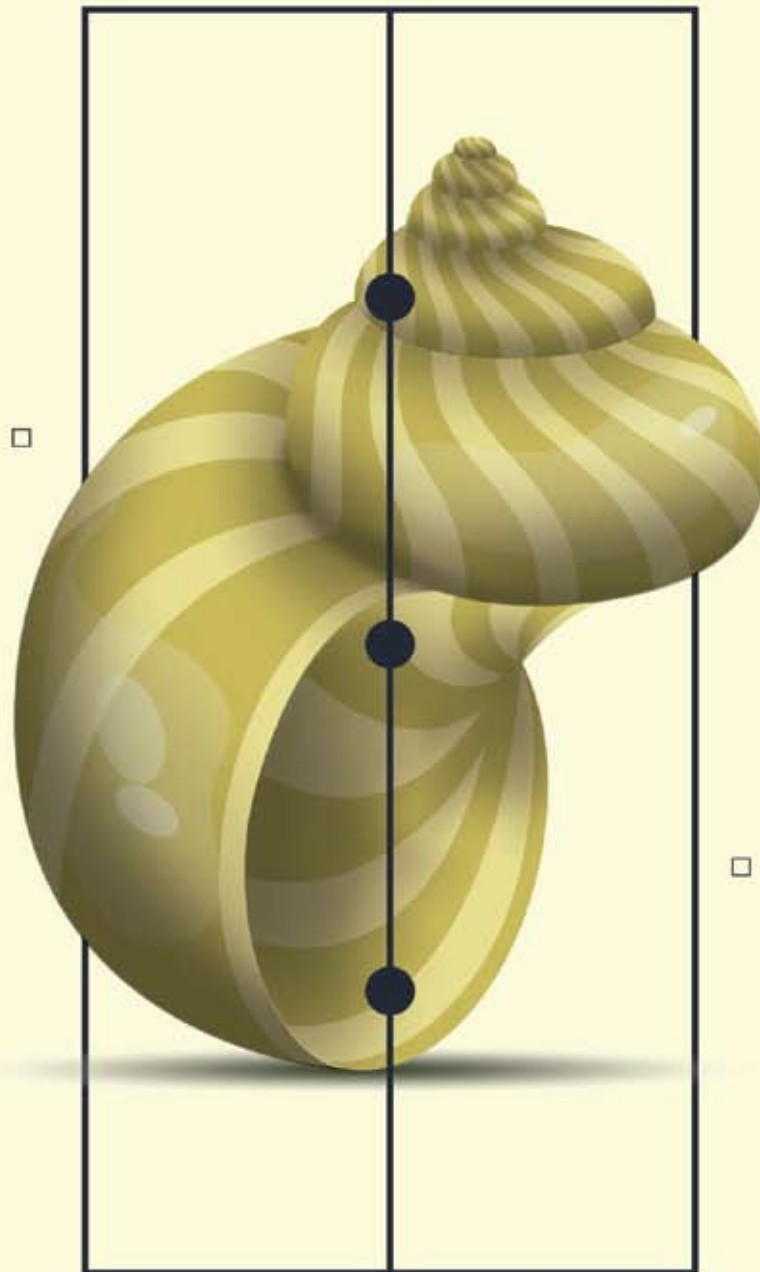
IMPRESIÓN

RT Grafismo, S. A. de C. V.
Tel. 5740 7190 / Fax 5740 7113
rtgrafismo@prodigy.net.mx

PORTADA

49 Congreso Nacional de la
Sociedad Matemática Mexicana

3CIMA



...

FREE ADMISSION

September 5-9 2016

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla invites to the Third International Conference on Mathematics and its Applications (3CIMA) to be held at the School of Physics and Mathematics (FCFM).

BUAP **FCFM** **CIMA**

☎ 01 (222) 229 55 00 ext. 7565 |

✉ cima@fcm.buap.mx |

🌐 www.fcm.buap.mx/cima |

📘 [cima.fcm.buap](https://www.facebook.com/cima.fcm.buap)