SIMA 2017
Seminario Interinstitucional de Matrices Aleatorias

SESIÓN I
del 24 al 27 de Abril
Culiacán, Sinaloa

Esta sesión está dirigida a estudiantes de las carreras de matemáticas, físico-matemáticas, matemáticas aplicadas, actuaría, ingeniería matemática y afines.

CURSO CORTO

Matrices aleatorias y probabilidad no-conmutativa
Dr. Carlos Vargas Obieta
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

HORARIO
Lunes, Martes y Jueves: 16:00 - 17:15
Miércoles: 12:00 - 13:10

Los eventos programados se realizarán en la Sala de Usos Múltiples
"*MC Francisco Javier Palomares García*"
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa
Av. de las Américas y Blvd. Universitarios S/N
Ciudad Universitaria C.P. 80010
Culiacán de Rosales, Sinaloa

CONFERENCIAS

Martes 25 17:20 - 18:20
Matrices aleatorias y distribución del semicírculo: la ley de Wigner
Dr. Alfonso Rocha Arteaga
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UAS

Miércoles 26 13:10 - 14:00
Matrices aleatorias y polinomios ortogonales
Dr. Jesús Armando Domínguez Molina
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UAS

Jueves 27 17:20 - 18:20
El problema de momentos y probabilidad no-conmutativa
Saúl Rogelio Mendoza Jacobo
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UAS

CIMAT

ISSN 2007-7122

CARTA INFORMATIVA
DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

No. 76
Mayo 2016
Octubre 2016

- Optimización de un portafolio en la práctica
- Juegos diferenciales estocásticos en horizonte infinito
- Resumen del trabajo realizado a cuatro años de la creación de la Comisión de Equidad y Género de la Sociedad Matemática Mexicana
- Informe de la Olimpiada de Matemáticas 2016
- Informe del 49° Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 2016

Optimización de un portafolio en la práctica

Ramón Sebastián Salat Figols
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional,
rsalat@esfm.ipn.mx

1. Introducción

Supóngase que un inversionista tiene una unidad monetaria y que desea invertirla en n activos financieros, asegurando una cierta ganancia esperada y minimizando el riesgo, es decir, minimizando la varianza de la ganancia. Si los rendimientos de los activos se representan por $R_1, R_2, \ldots, R_n$, y las cantidades invertidas en los activos por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en forma respectiva, entonces la ganancia es:

$$G = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \tag{1}$$

Su valor esperado es:

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) x_i \tag{2}$$

Y la varianza de la ganancia es:

$$\begin{aligned} V(G) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i, \sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{Cov}(R_i, R_j) \end{aligned} \tag{3}$$

A la matriz que tiene por entrada ij a $\operatorname{Cov}(R_i, R_j)$, se le llama matriz de covarianzas de los rendimientos y se le denota por Σ; a la entrada ij, la denotaremos simplemente por c_{ij}. Y a los valores esperados de los rendimientos, los denotaremos por $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, en forma respectiva.

El problema planteado inicialmente puede escribirse como:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j c_{ij} \text{ sujeto a las restricciones}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = g_0.$$

Este problema se puede resolver empleando multiplicadores de Lagrange. El lagrangiano correspondiente es:

$$L = \frac{1}{2} x^T \Sigma x + \lambda_1 (g_0 - x^T \mu) + \lambda_2 (1 - x^T 1_n) \tag{4}$$

donde $\mu^T = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$, $1_n^T = (1, \ldots, 1)$ y Σ es la matriz de covarianzas de los rendimientos. El factor $\frac{1}{2}$ se ha introducido para simplificar las ecuaciones.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \Sigma x - \lambda_1 \mu - \lambda_2 1_n \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_0 - x^T \mu \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - x^T 1_n \tag{7}$$

Igualando a cero (5) y despejando x, se obtiene:

$$x = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} 1_n \tag{8}$$

Igualando (6) y (7) a cero y substituyendo el valor de x dado por (8), se obtienen:

$$\lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 {1_n}^T \Sigma^{-1} \mu = g_0 \tag{9}$$

$$\lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} 1_n + \lambda_2 {1_n}^T \Sigma^{-1} 1_n = 1 \tag{10}$$

Se supone que Σ es no singular y se emplea la propiedad de que Σ es simétrica. De (9) y (10) se obtienen λ_1 y λ_2. Substituyendo estos valores en (8), se obtiene x.

En principio, el problema propuesto está resuelto. Pero, cuando se desea optimizar un portafolio de inversiones, usualmente se disponen de las series temporales de rendimientos de los diferentes activos y a partir de éstas series hay que estimar los parámetros. Se pueden usar, por ejemplo, los estimadores de máxima verosimilitud. Sin embargo, las series temporales son muestras aleatorias; si escogemos muestras diferentes, provenientes de una misma población, los valores de los parámetros estimados variarán y por lo tanto, los portafolios óptimos también variarán. Best y Grauer (1991), mostraron que los portafolios óptimos son muy sensibles a los cambios en las medias de los rendimientos de los activos. Se han propuesto diferentes alternativas para tratar con el problema: Ceria y Stubs (2004), incorporan la estimación del riesgo debido al muestreo en la función objetivo; Fama y French (1992), proponen usar estimación bayesiana; Michaud (1998), utiliza técnicas de re-muestreo.

El objetivo de este trabajo introductorio al tema, es el de estudiar qué tanto pueden variar x y la varianza mínima, debido a la variación de los parámetros, ocasionada por el muestreo. Los datos considerados consisten en los rendimientos diarios reales de cinco acciones durante 750 días.

2. Obtención de parámetros por simulación

Se supone que los rendimientos de los activos siguen una distribución multinormal con matriz de covarianzas Σ. Esta hipótesis puede cumplirse aproximadamente, si los valores de los activos siguen movimientos brownianos geométricos (y quizá en otros casos). Si el valor de un activo en el tiempo t es V_t, entonces:

$$\log\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) = \log\left(1 + \frac{V_{t+1} - V_t}{V_t}\right) = \log\left(1 + R_t\right) \approx R_t \quad (11)$$

Si el rendimiento en el tiempo t, R_t, es pequeño.

Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar. Y $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias definidas como combinaciones lineales de las Z_i, del siguiente modo:

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} Z_k \quad (12)$$

Entonces, la covarianza entre Y_i y Y_j está dada por:

$$\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} \quad (13)$$

Si a_{ij} es la entrada ij de una matriz A y si queremos que las Y_i tengan la matriz de covarianzas Σ, entonces A deberá cumplir con:

$$AA^T = \Sigma \quad (14)$$

A puede considerarse como la matriz de Cholesky de la matriz de covarianza Σ. Suponiendo que Σ es positiva definida, la matriz de Cholesky existe y es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Las variables:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mu_1 + a_{11} Z_1 \\ Y_2 &= \mu_2 + a_{21} Z_1 + a_{22} Z_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= \mu_n + a_{n1} Z_1 + a_{n2} Z_2 + \ldots + a_{nn} Z_n \end{aligned} \quad (16)$$

tienen la misma matriz de covarianzas que $R_1, \ldots, R_n$ y las mismas esperanzas, por lo tanto para simular valores para $R_1, \ldots, R_n$, se pueden generar valores para $Y_1, \ldots, Y_n$, usando las fórmulas dadas por (16).

El proceso a seguir para la simulación de m portafolios con muestras de tamaño 750 es el siguiente:

1. $i = 0$.
2. Mientras $i < m$.
3. Generar una muestra para $R_1, \ldots, R_n$ de tamaño 750, usando (16).
4. Estimar los valores esperados para $R_1, \ldots, R_n$ y la matriz de covarianza.
5. Encontrar el portafolio óptimo con los parámetros estimados en 4,
6. $i = i + 1$.

Para ejecutar el algoritmo en computadora se usó el lenguaje Python [10] y las librerías Matplotlib [9] y Numpy [11].

3. Resultados

El programa de computadora utilizado es capaz de leer de un archivo separado por comas, csv, n datos de los precios diarios de m activos. En el ejemplo específico que se presenta en esta sección, se emplearon datos reales acerca de los precios reales de 5 acciones. El tamaño de la muestra fue de 750 y el tamaño de las muestras simuladas para los rendimientos, también fue de 750.

La matriz de covarianzas estimada es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} +0.0006766 & +0.0000775 & +0.0001199 & +0.0000062 & +0.0001034 \\ +0.0000775 & +0.0014878 & +0.0000537 & -0.0000058 & +0.0009007 \\ +0.0001199 & +0.0000537 & +0.0010919 & +0.0000361 & +0.0004801 \\ +0.0000062 & -0.0000058 & +0.0000361 & +0.0003815 & +0.0000143 \\ +0.0001034 & +0.0009007 & +0.0004801 & +0.0000143 & +0.0008002 \end{pmatrix}$$

Y los valores estimados para las esperanzas de los rendimientos son:

$$u = [-0.0014998, 0.0002708, -0.0036702, 0.0004994, -0.0011021]$$

El valor de x que minimiza la varianza sujeta a que la ganancia sea de 0.0002497 (este valor corresponde a la mitad del máximo de los rendimientos de los activos) es:

$$x = [0.1933, 0.0749, -0.0918, 0.6808, 0.1428]$$

Y la varianza mínima obtenida es 0.0002449. Óbservese que esta varianza es menor que las varianzas de los rendimientos de cualquiera de los activos.

En la figura 1, se muestra la distribución empírica obtenida para el valor esperado del rendimiento del primer activo; y en la figura 2 se muestra la distribución de los errores porcentuales en el rendimiento del primer activo. El cambio porcentual en el rendimiento del primer activo, tiene un intervalo de confianza del $90\,\%$ dado por $[-104.41, 103.69]$; este cambio representa una variación importante, aún cuando el tamaño de la muestra de 750 es notable. Para mayor precisión, en el cuadro 1, se muestran los intervalos de confianza del $90\,\%$ para cada uno de los rendimientos.

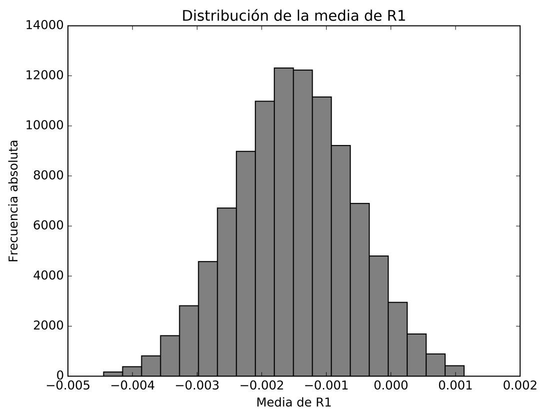

Figura 1: Distribución empírica de los rendimientos del primer activo.

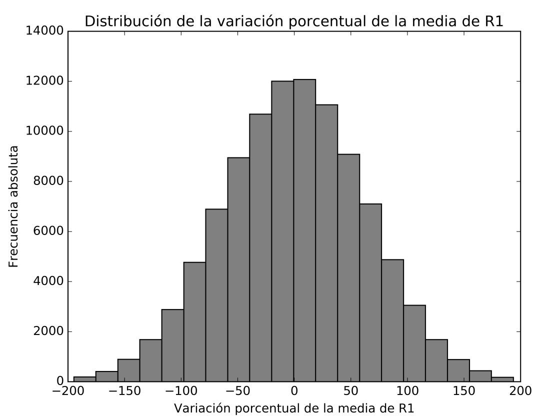

Figura 2: Distribución del error porcentual en μ_1.

El coeficiente correspondiente al primer activo en el portafolio óptimo, sigue la distribución mostrada en la figura 3 y su variación porcentual, está en la figura 4. El cambio porcentual en el primer coeficiente, tiene un intervalo de confianza dado por $[-73.57, 63.20]$, que también representa una variación importante. En el cuadro 2, se muestran los intervalos de confianza del $90\,\%$ para cada uno de los coeficientes del portafolio óptimo. El nivel de incertidumbre sobre el portafolio óptimo es grande.

Activo	Intervalo	
1	-0.003057	0.000064
2	-0.002046	0.002601
3	-0.005661	-0.001688
4	-0.000672	0.001667
5	-0.002809	0.000607

Cuadro 1: Intervalo de confianza del $90\,\%$ de las medias de los rendimientos.

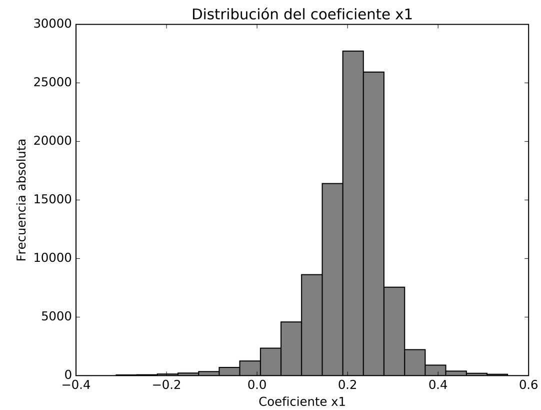

Figura 3: Distribución empírica del coeficiente del primer activo del portafolio óptimo.

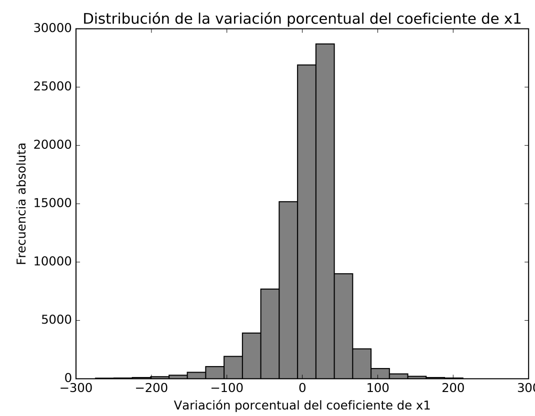

Figura 4: Distribución del error porcentual del coeficiente del primer activo.

La distribución empírica para la varianza mínima se encuentra en la figura 5 y el cambio porcentual, en la figura 6. El intervalo de confianza del $90\,\%$ para la varianza es $[0.0001909, 0.0002658]$; el intervalo de confianza del $90\,\%$ de la variación porcentual de la varianza mínima es $[-22.04, 68.72]$. Como puede observarse, la longitud del intervalo del cambio porcentual en la varianza mínima es notablemente inferior a la longitud del intervalo correspondiente al coeficiente del primer activo, lo cual, es una buena noticia, porque finalmente, el interés es minimizar la varianza.

Coeficiente	Intervalo	
1	0.049855	0.315293
2	-0.219626	0.338289
3	-0.367437	0.176090
4	0.491057	0.867269
5	-0.272897	0.636719

Cuadro 2: Intervalo de confianza del 90 % para los coeficientes.

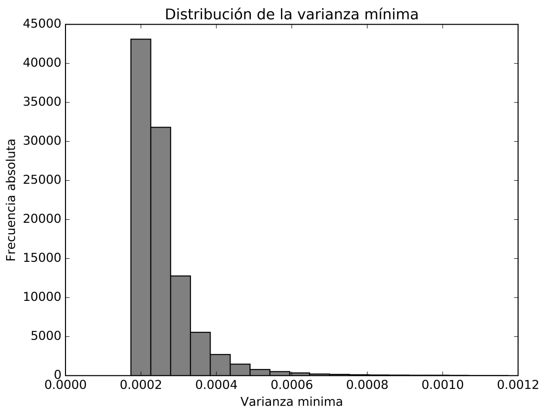

Figura 5: Distribución empírica de la varianza mínima.

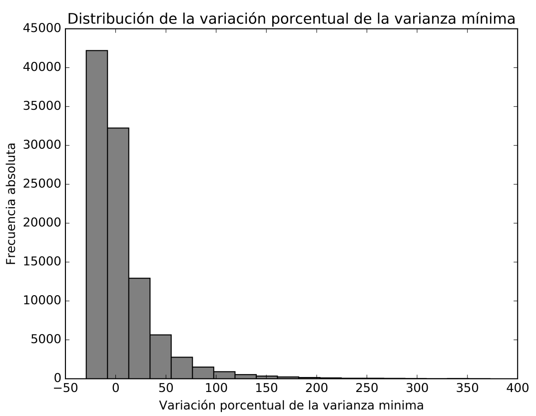

Figura 6: Distribución del error porcentual de la varianza mínima.

4. Conclusiones

El ejemplo mostrado en este trabajo sustenta la afirmación de que el portafolio óptimo considerado, está sujeto a una considerable incertidumbre. Sin embargo, dado que usualmente, solamente conocemos una estimación de los parámetros, únicamente podremos tener una estimación de dicha incertidumbre.

En este trabajo solamente se consideraron muestras de tamaño 750, que es un valor razonable. Si las muestras son de menor tamaño, la incertidumbre en el portafolio óptimo será mayor y, por el contrario, si es posible considerar muestras de mayor tamaño, la incertidumbre será menor.

Finalmente, es necesario observar, que a partir de (16) es posible intentar encontrar las distribuciones teóricas de los estimadores, lo cual, es muy deseable. Esto, aunado a un análisis de sensibilidad del modelo con respecto a cada parámetro, permite intentar obtener resultados de carácter general.

Bibliografía

[1] Harry Markowitz, *Portfolio selection*, The Journal of Finance, 7(1):77-91, 1952.

[2] Michael J. Best, Robert R. Grauer, *On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Result,* The Review of Financial Studies, 4(2):315-342, 1991.

[3] Sebastian Ceria, Robert Stubbs, *Incorporating Estimation Error in Portfolio Optimization: Robust Efficient Frontiers,* Axiom Inc., Working Paper, 2004

[4] Eugene Fama, Kenneth R. French, *The Cross-Section of Expected Stock Returns,* Journal of Finance, 47(2), 427-466, 1992.

[5] Richard Michaud, 1998, *Efficient Asset Managment,* Cambridge, MA, Harvard Business School Press.

[6] Richard Courant, Fritz John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Springer, reprint 1989, pp. 325-444.

[7] Bernard Lindgren, *Statistical Theory*, Chapman & Hall, 1993, pp. 253-290.

[8] Sheldon M. Ross, *Simulation*, Academic Press, fifth edition, 2012.

[9] John D. Hunter. *Matplotlib: A 2D graphics environment*, Computing In Science & Engineering 9(3), pp. 90-95.

[10] Guido van Rossum, *Python tutorial, Technical Report CS-R9526, Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Amsterdam, May 1995.*

[11] Jim Hugunin, *The Python Matrix Object: Extending Python for Numerical Computation,* Proceedings of the Third Python Workshop, Reston, Va., Dec. 1995.

Juegos diferenciales estocásticos en horizonte infinito

Héctor Jasso-Fuentes y
José Daniel López-Barrientos
Depto. de Matemáticas, CINVESTAV-IPN
Facultad de Ciencias Actuariales
Universidad Anáhuac
hjasso@math.cinvestav.mx
daniel.lopez@anahuac.mx

Resumen

En este trabajo daremos una breve descripción de lo que es un juego diferencial estocástico para dos tipos de funciones objetivo de tipo asintótico (criterios con horizonte infinito). También, mencionaremos a grandes rasgos la manera de solucionar estos juegos basándonos en la técnica de programación dinámica.

Introducción

Para poder definir de manera precisa lo que es un juego diferencial estocástico, es conveniente analizar primero la definición de *juego dinámico.* A saber, un juego dinámico se define como un modelo matemático de negociación o conflicto entre *decisores* —también conocidos como *jugadores* o *controladores*— que buscan optimizar, a través del tiempo, el empleo de recursos limitados. En estos modelos, el atributo "optimizar'' es un poco sutil, debido a que los agentes están interesados en maximizar o minimizar, cada uno, cierto índice de funcionamiento o función objetivo; tal sutileza proviene del hecho de que la función objetivo de cada jugador puede depender de las decisiones (variables) de los demás jugadores. Por tanto, al querer maximizar o minimizar dicha función objetivo de manera independiente, no será posible en el contexto usual que conocemos en optimización, sino que debemos re-definir lo que se entiende por *optimizar*. Para ello, es importante clasificar la teoría de juegos en dos importantes categorías. En cada una de éstas, el término *punto crítico* que conocemos comúnmente en optimización, se reemplaza por el nombre de *equilibrio*.

1.- Juegos dinámicos cooperativos: En este tipo de juegos, los jugadores actúan a través del tiempo en equipo tratando de optimizar un índice de funcionamiento que sea benéfico para todos. Para estos juegos se definen los denominados *equilibrios de Pareto* y más específicamente, los equilibrios de compromiso y los problemas de negociación de Nash. Algunos casos especiales de estos juegos pueden consultarse en Filar y Petrosjan [6] o en Haurie [9].

2.- Juegos dinámicos no cooperativos: En esta clasificación, los jugadores no cooperan entre sí y actúan a través del tiempo de manera independiente queriendo alcanzar cada uno su propio beneficio. Los equilibrios más comunes en esta clasificación son los *equilibrios de Nash* y los *equilibrios de Stackelberg*. En este tipo de juegos, existe una sub-clase denominada *juegos de suma cero*, la cual tiene como característica de que la ganancia de un jugador (digamos jugador 1) es la pérdida de su contrincante (jugador 2) —ver, por ejemplo, Dockner et. al [4] o Jasso-Fuentes [11].

Por otra parte, una característica que distingue a los juegos dinámicos, es la intervención de un sistema dinámico en el modelo. Dicho sistema interviene como una restricción del juego, si se interpreta este último como un problema de optimización. Así pues, un juego dinámico está compuesto por tres elementos esenciales: (i) una función objetivo o índice de funcionamiento para cada jugador, (ii) un sistema dinámico y (iii) un dominio para la función objetivo de cada jugador, que lleva el nombre de *conjunto de políticas de control* o *estrategias* . Estas dos últimas componentes son interpretadas como las restricciones del juego.

Para fijar ideas, supondremos que el juego dinámico está constituido únicamente por dos jugadores, en el entendido de que el caso general de n jugadores se estudia de manera similar —ver los comentarios en la introducción de Jasso-Fuentes et. al. [14]. También supondremos que estamos en el contexto no cooperativo de suma cero. Así pues las reglas del juego se pueden explicar como sigue: En cada tiempo $t \geq 0$, cada jugador observa el estado del sistema, denotado por $x(t)$ y de manera independiente, ambos eligen una acción, $u_1(t)$ y $u_2(t)$, respectivamente, extraídas por las estrategias u_1 y u_2, que los jugadores eligieron de antemano. Ambas acciones generan una ganancia r_t para el jugador 1 y un costo del mismo valor para el jugador 2. El objetivo del jugador 1 es usar una estrategia "inteligente'' a través del tiempo, digamos u_1^*, que maximice una ganancia $(u_1, u_2) \mapsto G(u_1, u_2)$ que comúnmente tiene forma de una suma o un promedio de los costos r_t a lo largo del tiempo, y que el jugador 2 tiene que pagar; mientras que el objetivo del jugador 2 será encontrar otra estrategia u_2^* para minimizar la ganancia que tiene que pagar al jugador 1. En resumen, ambos jugadores desean optimizar un costo/recompensa desde su propio punto de vista sobre un criterio de funcionamiento G, previamente establecido.

Con lo dicho hasta aquí, estamos en condiciones de entender lo que es un juego diferencial estocástico.

Juegos diferenciales estocásticos

Un juego *diferencial estocástico* es un juego dinámico en donde la dinámica del sistema está descrita por una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$dx(t) = b(x(t), u_1(t), u_2(t))dt + \sigma(x(t))dW(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

donde $b : \mathbb{R}^m \times U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ y $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m \times d}$ son funciones dadas, llamadas la *deriva* y la *dispersión* de $x(\cdot)$, mientras que $W(\cdot)$ es un movimiento browniano estándar de dimensión d. Los conjuntos $U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ son llamados *conjuntos de acciones* para los jugadores 1 y 2, respectivamente. Además, para $i = 1, 2$, $u_i(\cdot)$ es un proceso estocástico con valores en U_i que representa el acciones de control del jugador i en cada tiempo $t \geq 0$.

Observe que de la definición anterior, la solución $x(\cdot)$ es de dimensión m y representa el estado del juego, el cual está evidentemente afectado por las acciones que los dos jugadores pueden tomar a través del tiempo.

Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. En este artículo, la notación $\mathcal{W}^{l,p}(\mathcal{O})$ representará el espacio de Sobolev que consiste en todas las funciones medibles h con valores reales sobre $\mathcal{O}$ tales que $D^\lambda h$ existe para toda $|\lambda| \leq l$ en el sentido débil y están contenidas en el espacio $L^p(\mathcal{O})$, donde

$$D^\lambda h := \frac{\partial^{|\lambda|} h}{\partial x_1^{\lambda_1}, \cdots, \partial x_n^{\lambda_n}} \quad \text{con } \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \text{y} \quad |\lambda| := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

De esta manera, para cada par $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$, y ν en $\mathcal{W}^{2,p}(\mathbb{R}^m)$, $p \geq 1$, definimos el operador

$$\mathcal{L}^{u_1,u_2}\nu(x) = \sum_{i=1}^{m} b^i(x, u_1, u_2)\frac{\partial \nu}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_i \partial x_j}(x), \tag{2}$$

donde b^i es la i-ésima componente de b, y a^{ij} es la (i,j)-componente de la matriz $a(\cdot) := \sigma(\cdot)\sigma'(\cdot)$. Este operador tendrá un significado importante más adelante.

Estrategias

Para cada $k = 1, 2$, denotaremos por $\mathcal{P}(U_k)$ el espacio de medidas de probabilidad que actúan sobre la sigma álgebra $\mathcal{B}(U_k)$ de U_k. Una propiedad interesante de los conjuntos $\mathcal{P}(U_k)$, $k = 1, 2$; es que, bajo la topología de convergencia débil, éstos conjuntos son compactos si suponemos que los conjuntos de acciones U_k, $k = 1, 2$ también lo son.

Procederemos ahora a definir el conjunto de estrategias para cada jugador; es decir, especificaremos de manera exacta la naturaleza de los procesos $u_k(\cdot)$ $(k = 1, 2)$ en (1). Para ello, introduciremos el concepto de estrategia aleatorizada.

Definición 1. **(a)** *Una* estrategia aleatorizada *para el jugador k $(k = 1, 2)$ se define como la familia de funciones $\pi^k := \{\pi_t^k : t > 0\}$, donde $\pi_t^k : \mathcal{B}(U_k) \times \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ y se satisface lo siguiente:*

- **(a.1)** *para cada $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^m$, $\pi_t^k(\cdot|x)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(U_k)$, de tal manera que $\pi_t^k(U_k|x) = 1$;*
- **(a.2)** *para cada $D \in \mathcal{B}(U_k)$ y $t \geq 0$, $\pi_t^k(D|\cdot)$ es una función Borel medible sobre $\mathbb{R}^m$; y*
- **(a.3)** *para cada $B \in \mathcal{B}(U_k)$ y $x \in \mathbb{R}^m$, la función $t \mapsto \pi_t^k(B|x)$ es Borel medible sobre $[0, \infty)$.*

(b) *Se dice que una estrategia aleatorizada $\pi^k = \{\pi_t^k : t \geq 0\}$ es* estacionaria *si existe una única función π^k sobre $\mathcal{B}(U_k) \times \mathbb{R}^m$ tal que $\pi_t^k(\cdot|x) = \pi^k(\cdot|x)$ para toda $x \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$ y $k = 1, 2$.*

Denotaremos al conjunto de estrategias estacionarias para el jugador k como Π^k, $k = 1, 2$.

Cuando los jugadores usan las estrategias $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi^1 \times \Pi^2$, escribimos la deriva b in (1) como

$$b(x, \pi^1, \pi^2) := \int_{U_2}\int_{U_1} b(x, u_1, u_2)\pi^1(du_1|x)\pi^2(du_2|x). \tag{3}$$

De manera análoga, escribiremos

$$\mathcal{L}^{\pi^1,\pi^2}h(x) := \int_{U_2}\int_{U_1} \mathcal{L}^{u_1,u_2}h(x)\pi^1(du_1|x)\pi^2(du_2|x), \tag{4}$$

donde $\mathcal{L}^{u_1,u_2}$ es el operador definido en (2).

A continuación, daremos algunos supuestos sobre los componentes de (1):

Hipótesis 2. **(a)** *Las funciones b y σ son continuas en sus respectivos dominios y los mapeos $x \mapsto b(x, u_1, u_2)$ y $x \mapsto \sigma(x)$ son Lipschitz, para todo $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$.*

(b) *Existe una constante positiva γ tal que la matriz $a := \sigma\sigma'$ satisface:*

$$x'a(y)x \geq \gamma|x|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \textit{(elipticidad uniforme)}.$$

(c) *Los conjuntos de acciones $U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ y $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ son compactos.*

Bajo la hipótesis 2, para cada par de estrategias $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi^1 \times \Pi^2$, se garantiza la existencia de una única solución de (1) en el sentido fuerte, la cual cumple además la propiedad de ser un proceso de Markov-Feller. También, para cada par de estrategias $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi^1 \times \Pi^2$, el operador $\mathcal{L}^{\pi^1,\pi^2}\nu$ en (4) coincide con el operador infinitesimal de (1). (Para más detalles, ver los argumentos en el teorema 2.2.12 dado en Arapostathis et. al. [1].)

Algunas veces es conveniente escribir $x^{\pi^1,\pi^2}(\cdot)$ en vez de $x(\cdot)$, para enfatizar su dependencia de las estrategias $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi^1 \times \Pi^2$. De esta manera, vamos a denotar por $\mathbb{P}^{\pi^1,\pi^2}(t, x, \cdot)$ la probabilidad de transición correspondiente del proceso $x^{\pi^1,\pi^2}(\cdot)$, i.e., $\mathbb{P}^{\pi^1,\pi^2}(t, x, B) := \mathbb{P}(x^{\pi^1,\pi^2}(t) \in B|x(0) = x)$ para cualquier conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}^m$ y $t \geq 0$. La esperanza condicional asociada se escribirá como $\mathbb{E}_x^{\pi^1,\pi^2}(\cdot)$.

Tasa de costo/recompensa

Como se mencionó anteriormente, en la teoría de juegos dinámicos, en cada instante del tiempo, se están generando ganancias/costos para cada jugador cuando cada uno elige una acción de control. En términos más formales, podemos denotar estos costos por medio de una función $r : \mathbb{R}^m \times U_2 \times U_2 \mapsto \mathbb{R}$ que genera dicha ganancia/costo por unidad de tiempo. Así pues, para cada $t \geq 0$, se tiene una ganancia $r(x(t), u_1(t), u_2(t))$ para el jugador 1 y el mismo costo para el jugador 2 cuando éstos usan las estrategias $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Por otra parte, podemos definir a la función $r(x, \pi_1, \pi_2)$ de manera similar a (3), la cual representa la ganancia (resp. costo) del jugador 1 (resp. jugador 2), cuando ambos usan el par de estrategias aleatorizadas $(\pi_1, \pi_2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$.

Critero descontado

Definiremos ahora nuestro primer criterio de optimalidad. Hay diversas aplicaciones en los campos actuarial (vea, por ejemplo [3, 19, 20]) y financiero (vea [2, 18, 15]), entre otros.

Definición 3. *El pago esperado descontado cuando los jugadores eligen la estrategia $\left(\pi^1, \pi^2\right)$ en $\Pi^1 \times \Pi^2$, dado el estado inicial del juego $x(0) = x \in \mathbb{R}^m$, se define como*

$$V_\alpha(x, \pi^1, \pi^2) := \mathbb{E}_x^{\pi^1,\pi^2}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} r(x(t), \pi^1, \pi^2)\right] dt. \quad (5)$$

Un primer problema es verificar que el costo (5) es finito. Por ejemplo, si consideramos que r es uniformemente acotada, es muy fácil verificar que (5) es también acotado. En el caso de que r no cumpla con esta última condición, se pueden pedir las siguientes hipótesis tanto para r como para $\mathcal{L}^{\pi^1,\pi^2}$:

Hipótesis 4. **(a)** *La función r es continua sobre su dominio, y el mapeo $x \mapsto r(x, u_1, u_2)$ es Lipschitz, para todo $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$.*

(b) *Existe una función $w \geq 1$ en $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m)$ y constantes $d \geq c > 0$ tales que*

(b.1) $\lim_{|x|\to\infty} w(x) = +\infty$, *y*

(b.2) $\mathcal{L}^{\pi^1,\pi^2} w(x) \leq -cw(x) + d$ *para cada* $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi^1 \times \Pi^2$ *y* $x \in \mathbb{R}^m$.

(c) *Para cada $x \in \mathbb{R}^m$, $\sup_{(u_1,u_2)\in U_1\times U_2} |r(x, u_1, u_2)| \leq Mw(x)$.*

Con esta nueva hipótesis, se puede verificar que V_α es acotada en el siguiente sentido (ver, por ejemplo, la proposición 4.3 en López-Barrientos [17]): Existe una constante $\bar{M} > 0$ tal que

$$\sup_{(\pi^1,\pi^2)\in\Pi_1\times\Pi_2} |V_\alpha(x, \pi^1, \pi^2)| \leq \bar{M}w(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Criterio promedio

El siguiente criterio es también conocido como criterio ergódico o a largo plazo. En éste se considera únicamente el comportamiento del juego a largo plazo, ignorando dicho comportamiento en etapas finitas. Estos criterios son muy usados en aplicaciones en las que nos interesa conocer el comportamiento asintótico –a largo plazo- de un sistema. Ejemplos de esto son el control de la contaminación en el largo plazo (vea por ejemplo [13, 16]) y los casos en los que nos interesa encontrar refinamientos que nos permitan alcanzar cierto objetivo *promedio* en el mediano plazo (vea [5, 12]).

Definición 5. *El pago ergódico esperado cuando los jugadores eligen la estrategia $\left(\pi^1, \pi^2\right)$ en $\Pi^1 \times \Pi^2$, dado el estado inicial del juego $x(0) = x \in \mathbb{R}^m$, se define como*

$$J(x, \pi^1, \pi^2) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}_x^{\pi^1,\pi^2}\left[\int_0^T r(x(t), \pi^1, \pi^2)\right] dt. \quad (6)$$

Observe que (6) siempre existe, ya que el límite superior está bien definido.

Equilibrios de Nash

Una vez que hemos definido los criterios de pago, procedemos a definir lo que entendemos por estrategias "óptimas" para los jugadores.

Definición 6. *Sea G la función V_α definida en (5) (resp. sea G la función J definida en (6)). Decimos que el par $(\pi_*^1, \pi_*^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$ es un equilibrio de Nash para el juego diferencial estocástico de suma cero con pago descontado (resp. pago promedio) si para toda condición inicial del juego $x(0) = x$, se tiene*

$$G(x, \pi^1, \pi_*^2) \leq G(x, \pi_*^1, \pi_*^2) \leq G(x, \pi_*^1, \pi^2) \qquad \forall(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2. \quad (7)$$

Es importante hacer mención de que para el caso de juegos de suma cero, la definición (7) de equilibrio de Nash es más simple que en contextos más generales. Para la definición general de equilibrios de Nash en el contexto de juegos de suma no-cero, vea por ejemplo las definiciones 3.9 y 4.3 en Jasso-Fuentes et. al [14].

Programación dinámica

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar la existencia de un punto silla $(\pi_*^1, \pi_*^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$ como en (7), dando condiciones explícitas a los elementos, tales como b, σ, r, etc... del juego. Para ello, nos basaremos en la técnica de programación dinámica que consiste en estudiar la solución de cierto sistema cuasi-lineal de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, que a su vez contiene ciertos "optimizadores"; estos últimos llegan a ser los puntos silla que deseamos encontrar.

Definición 7. *Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto. Denotamos por $\mathcal{B}_w(\mathcal{O})$ el espacio de Banach de todas las funciones medibles con valores reales v sobre $\mathcal{O}$ con w–norma finita definida como sigue:*

$$\|v\|_w := \sup_{x\in\mathcal{O}} \frac{|v(x)|}{w(x)}.$$

A continuación enunciaremos los resultados principales de este artículo que muestran la existencia de puntos silla antes mencionados. Primeramente mostraremos dicha existencia para el caso descontado. Los detalles de la demostración del siguiente resultado, pueden consultarse en el teorema 4.9 dentro de López-Barrientos [17].

Teorema 8 (**Optimalidad en el caso descontado**)**.** *Bajo las hipótesis 2 y 4:*

(a) *Existe una función $\varphi \in \mathcal{B}_w(\mathcal{O}) \cap \mathcal{W}^{2,p}(\mathbb{R}^m)$ y un par $(\pi_*^1, \pi_*^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$, que satisface el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned}\alpha\varphi(x) &= \inf_{\nu\in\mathcal{P}(U_2)} \left\{r(x,\pi_*^1,\nu) + \mathcal{L}^{\pi_*^1,\nu}\varphi(x)\right\} \\ &= \sup_{\lambda\in\mathcal{P}(U_1)} \left\{r(x,\lambda,\pi_*^2) + \mathcal{L}^{\lambda,\pi_*^2}\varphi(x)\right\} \ \forall x\in\mathbb{R}^m \qquad (8) \\ &= r(x,\pi_*^1,\pi_*^2) + \mathcal{L}^{\pi_*^1,\pi_*^2}\varphi(x).\end{aligned}$$

En este caso, las notaciones $r(x,\pi_*^1,\nu)$, $\mathcal{L}^{\pi_*^1,\nu}$, $r(x,\lambda,\pi_*^2)$, y $\mathcal{L}^{\lambda,\pi_*^2}$, se definen de manera análoga a (3) *y* (4)*, reemplazando las medidas π^1 ó π^2 por ν y λ, de acuerdo al contexto.*

(b) *El par (π_*^1, π_*^2) obtenido en la parte (a) es un equilibrio de Nash asociado al criterio de pago descontado V_α*

Idea de la demostración: Para probar (a) se hace uso del siguiente problema auxiliar que llega a ser un caso especial de un problema de Dirichlet: Dada $R > 0$ una constante fija, defina la bola con centro en 0 y radio R como $B_R(0)$. Deseamos encontrar una solución $\varphi_R \in \mathcal{B}_w(\mathcal{O}) \cap \mathcal{W}^{2,p}(\mathbb{R}^m)$ que satisface el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\alpha\varphi_R(x) &= \inf_{\nu\in\mathcal{P}(U_2)} \sup_{\lambda\in\mathcal{P}(U_1)} \left\{r(x,\lambda,\nu) + \mathcal{L}^{\lambda,\nu}\varphi_R(x)\right\} \\ &= \sup_{\lambda\in\mathcal{P}(U_1)} \inf_{\nu\in\mathcal{P}(U_2)} \left\{r(x,\lambda,\nu) + \mathcal{L}^{\lambda,\nu}\varphi_R(x)\right\} \\ &\quad \forall x \in B_R(0) \qquad (9) \\ \varphi_R &= 0 \quad \text{sobre la frontera de } B_R(0).\end{aligned}$$

Bajo argumentos de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con valores a la frontera, el problema anterior es soluble —ver teorema 15.2 en Gilbarg & Trudinger [7]. Para llegar a la ecuación (8), tomamos el límite en ambos lados de (9) cuando $R \to \infty$ y después de algunas estimaciones, se puede llegar a la existencia de una solución $\varphi \in \mathcal{B}_w(\mathcal{O}) \cap \mathcal{W}^{2,p}(\mathbb{R}^m)$ que verifica

$$\begin{aligned}\alpha\varphi(x) &= \inf_{\nu\in\mathcal{P}(U_2)} \sup_{\lambda\in\mathcal{P}(U_1)} \left\{r(x,\lambda,\nu) + \mathcal{L}^{\lambda,\nu}\varphi(x)\right\} \\ &= \sup_{\lambda\in\mathcal{P}(U_1)} \inf_{\nu\in\mathcal{P}(U_2)} \left\{r(x,\lambda,\nu) + \mathcal{L}^{\lambda,\nu}\varphi(x)\right\}.\end{aligned} \qquad (10)$$

Finalmente, bajo nuestras hipótesis, podemos demostrar que los elementos dentro de las llaves de (10) son continuos en $\mathcal{P}(U_1) \times \mathcal{P}(U_2)$ y sabemos que este último espacio es compacto bajo la topología de convergencia débil. Por lo tanto, usando la teoría de multifunciones y selectores medibles (ver proposición D.5 en Hernández-Lerma & Lasserre [10]), se puede probar la existencia del par que alcanza el supremo y el ínfimo en (8), lo que demuestra (a).

Para demostrar (b), hacemos un simple uso de la fórmula diferencial de Itô generalizada (para más detalles sobre esta fórmula, ver, por ejemplo Lema 3.3.1 en Has'minskii [8]) y tomamos esperanzas para obtener:

$$E_x^{\pi_1,\pi_2}[\varphi(x(T)] = \varphi(x) + E_x^{\pi^1,\pi^2}\left[\int_0^T \mathcal{L}^{\pi^1,\pi^2}\varphi(x(s))ds\right],$$

de tal manera que combinando esta última expresión con (8), se sigue directamente que (π_*^1, π_*^2) satisface (7). □

El resto del material estará enfocado a la existencia de equilibrios de Nash en el caso promedio (6). Para este fin, primero hacemos notar que las hipótesis 2 y 4(b) aseguran la existencia de una probabilidad invariante $\mu_{\pi^1,\pi^2}(\cdot)$ para el proceso $x^{\pi^1,\pi^2}(\cdot)$, para cada par de estrategias $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$.

Pediremos además la siguiente hipótesis extra a nuestro proceso.

Hipótesis 9. *Para cada par $(\pi^1, \pi^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$, el proceso $x^{\pi^1,\pi^2}(\cdot)$ es exponencialmente ergódico; es decir, existen constantes C, $\delta > 0$, tales que*

$$\sup_{(\pi^1,\pi^2)\in\Pi_1\times\Pi_2} \left|E_x^{\pi^1,\pi^2} v(x(t)) - \mu_{\pi^1,\pi^2}(v)\right| \le Ce^{-\delta t}\|v\|_w w(x),$$

para toda $x \in \mathbb{R}^m$, $t \ge 0$ y $v \in \mathcal{B}_w(\mathbb{R}^m)$, donde $\mu_{\pi^1,\pi^2}(v) := \int_{\mathbb{R}^m} v(y)\mu_{\pi^1,\pi^2}(dy)$.

El siguiente teorema garantiza la existencia de equilibrios de Nash en el contexto de costo promedio. Los detalles de la demostración pueden consultarse dentro de la demostración del teorema 5.5 en López-Barrientos [17].

Teorema 10 (**Optimalidad en el caso promedio**)**.** *Bajo las hipótesis 2, 4 y 9:*

(a) *Existe una función $h \in \mathcal{B}_w(\mathcal{O}) \cap \mathcal{W}^{2,p}(\mathbb{R}^m)$, una constante j y un par $(\pi_*^1, \pi_*^2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$, que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} j &= \inf_{\nu \in \mathcal{P}(U_2)} \left\{ r(x, \pi_*^1, \nu) + \mathcal{L}^{\pi_*^1, \nu} h(x) \right\} \\ &= \sup_{\lambda \in \mathcal{P}(U_1)} \left\{ r(x, \lambda, \pi_*^2) + \mathcal{L}^{\lambda, \pi_*^2} h(x) \right\} \qquad (11) \\ &= r(x, \pi_*^1, \pi_*^2) + \mathcal{L}^{\pi_*^1, \pi_*^2} h(x). \end{aligned}$$

(b) *El par (π_*^1, π_*^2) obtenido en la parte (a) es un equilibrio de Nash asociado al criterio de pago promedio J definido en* (6)*.*

Idea de la demostración. Para llegar al sistema (11), usaremos la técnica del factor del descuento desvaneciente, la cual consiste en reescribir las ecuaciones de optimalidad (8) de una manera adecuada con la finalidad de poder ver al sistema (11) como una ecuación límite cuando $\alpha \downarrow 0$. A saber, para cada $\alpha > 0$, denotaremos por $h_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(0)$, donde φ_α es solución del sistema (8). Usando esta función, podemos reescribir (8) como

$$\begin{aligned} \alpha\varphi_\alpha(0) + \alpha h_\alpha(x) &= \inf_{\nu \in \mathcal{P}(U_2)} \left\{ r(x, \pi_*^1, \nu) + \mathcal{L}^{\pi_*^1, \nu} h_\alpha(x) \right\} \\ &= \sup_{\lambda \in \mathcal{P}(U_1)} \left\{ r(x, \lambda, \pi_*^2) + \mathcal{L}^{\lambda, \pi_*^2} h_\alpha(x) \right\} \\ &= r(x, \pi_*^1, \pi_*^2) + \mathcal{L}^{\pi_*^1, \pi_*^2} h_\alpha(x). \end{aligned}$$

Luego, haciendo uso de ciertas estimaciones, se puede concluir que $\alpha\varphi_\alpha(0) \to j$, donde j es una constante, $\alpha h_\alpha(x) \to 0$ y existe $h \in \mathcal{B}_w(\mathcal{O}) \cap \mathcal{W}^{2,p}(\mathbb{R}^m)$ tal que, cuando $\alpha \downarrow 0$, se tiene

$$\inf_{\nu \in \mathcal{P}(U_2)} \left\{ r(x, \pi_*^1, \nu) + \mathcal{L}^{\pi_*^1, \nu} h_\alpha(x) \right\} \to \inf_{\nu \in \mathcal{P}(U_2)} \left\{ r(x, \pi_*^1, \nu) + \mathcal{L}^{\pi_*^1, \nu} h(x) \right\},$$

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{P}(U_1)} \left\{ r(x, \lambda, \pi_*^2) + \mathcal{L}^{\lambda, \pi_*^2} h_\alpha(x) \right\}) \to \sup_{\lambda \in \mathcal{P}(U_1)} \left\{ r(x, \lambda, \pi_*^2) + \mathcal{L}^{\lambda, \pi_*^2} h(x) \right\},$$

$$\mathcal{L}^{\pi_*^1, \pi_*^2} h_\alpha(x) \to \mathcal{L}^{\pi_*^1, \pi_*^2} h(x).$$

De esta manera se garantiza la existencia de soluciones del sistema (11).

La demostración de (b) sigue los mismos argumentos de la del teorema 8(b). □

Bibliografía

[1] Arapostathis, A.; Ghosh, M.K.; Borkar, V.S.: *Ergodic control of diffusion processes*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 143. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2012).

[2] Bingham, N.H.; Kiesel, R. (2004) *Risk-Neutral Valuation*. Springer-Verlag, London.

[3] Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; Jones, D.; Nesbitt, C. (1997) *Actuarial mathematics.* The Society of Actuaries.

[4] Dockner, E.J.; Jorgensen, S.; Long, N.V.; Sorger, G: *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2000).

[5] Escobedo-Trujillo B.A., López-Barrientos J.D., Hernández-Lerma O. (2012) Bias and overtaking equilibria for zero-sum stochastic differential games. *J. Optim. Theory Appl.* **153**, pp. 662–687.

[6] Filar, J.A.; Petrosjan, L.A. (2000) Dynamic cooperative games. *International Game Theory Review*, **2**, pp. 47–65.

[7] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Reprinted version, Springer. Heidelberg, (1998).

[8] Has'minskii, R.J.: *Stochastic stability of differential equations*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen and den Rijn (1980).

[9] Haurie, A.(1976) A note on nonzero sum differential games with barganing solution *J. Optim. Theory Appl.* **18**, pp. 31–39.

[10] Hernández-Lerma, O.; Lasserre, J.B.: Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria. Springer, New York (1996).

[11] Jasso-Fuentes, H. (2005) Noncooperative continuous-time Markov games. *Morfismos* **9**, pp. 39–54.

[12] Jasso-Fuentes H., Hernández-Lerma O. (2008) *Characterizations of overtaking optimality for controlled diffusion processes*. Appl. Math. Optim. **57**, 349-369.

[13] Jasso-Fuentes, H.; López-Barrientos, J.D. (2015) *On the use of stochastic differential games against against nature to ergodic control problems with unknown parameters*. International Journal of Control. **88**, pp. 897–909.

[14] Jasso-Fuentes, H.; López-Barrientos, J.D.; Escobedo-Trujillo, B.A. (2017) Infinite-horizon nonzero-sum stochastic differential games with additive structure. *IMA J. Math. Control Inform.* **34**, pp. 283–309.

[15] Karatzas, I. (1997) *Lectures on the M;athematics of Finance*. American Mathematical Society. RI, USA.

[16] Kawaguchi, K. and Morimoto, H. (2007) *Long–run average welfare in a pollution accumulation model*. Journal of Economic Dynamics and Control. **31**, 703-720.

[17] López-Barrientos, J.D.: *Basic and Advanced Optimality Criteria for Zero-Sum Stochastic Differential Games*. ScD Dissertation. Department of Mathematics, CINVESTAV-IPN, (2012). Available at: http://www.math.cinvestav.mx/sites/default/files/tesis-daniel-2012.pdf.

[18] Øksendal, B. (2005) *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer, 5th ed. Berlin.

[19] Promislow, D.S. (2011) *Fundamentals of Actuarial Mathematics*. Wiley.

[20] Schmidli, H.: *Stochastic Control in Insurance*. Reprinted version, Springer-Verlag. London, (2008).

Resumen del trabajo realizado a cuatro años de la creación de la Comisión de Equidad y Género de la Sociedad Matemática Mexicana

Gabriela Araujo-Pardo y
Natalia García Colín
Comisión de Equidad y Género de la
Sociedad Matemática Mexicana

La Comisión de Equidad y Género (CEG) de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) fue creada en el año 2013 a solicitud de algunos de los miembros de la Junta Directiva 2012-2014, con la finalidad de promover la inclusión de grupos sub-representados, en particular mujeres a la actividad matemática del país.

Es claro que en los últimos tiempos la participación de las mujeres en el quehacer científico ha ido en aumento, sin embargo es claro también que existen aún muchos comportamientos, hábitos e ideas preconcebidas en los diferentes espacios sociales que dificultan todavía esta tipo participación. No quisiéramos ahondar demasiado en este tema porque de ninguna manera somos expertas en género pero es muy claro que estos hábitos e ideas preconcebidas están fuertemente arraigados en los diferentes países del mundo dependiendo de su sociedad y cultura y aun cuando los países son definidos como “desarrollados” siguen existiendo en los mismos diferentes tipos de discriminación hacia la mujer y hacia distintos grupos poco representados o considerados en si “discriminados” en dichas sociedades.

Desde luego queda claro que nuestra sociedad mexicana no es la excepción, más aun hablando desde el lugar de unas matemáticas mexicanas que han estado interesadas en este tema de la equidad, la representación y el incremento de las mujeres matemáticas mexicanas en los espacios de docencia e investigación en el país, nos atrevemos a afirmar que todavía tenemos un largo camino que recorrer y es esta la razón de nuestro interés por los temas de género y en particular por la creación de la Comisión de Equidad y Género de la Sociedad Matemática Mexicana en 2013.

El presidente de la Junta Directiva de la Sociedad Matemática Mexicana (bienio 2012-2014) era Luis Montejano, y además, en dicha junta, participábamos tres mujeres con distintos cargos: Judith Zubieta (Vicepresidenta), Luz de Teresa y Oteiza (Secretaria de Actas) y yo misma que era Vocal de la misma, todos nosotros y el resto de los miembros de la JD estábamos convencidos que apoyar el incremento de las mujeres en las matemáticas y en general buscar la igualdad en cuestiones de género y grupos sub-representados era no solo una buena propuesta de la Sociedad Matemática Mexicana si no, inclusive, una obligación que tenía la SMM con nuestra comunidad matemática y en general con la sociedad mexicana. Paralelamente recibimos, justo por parte de la comunidad matemática mexicana (radicada en México y en el extranjero) diversas sugerencias acerca de actividades que podría hacer la Sociedad Matemática Mexicana encaminadas a incrementar la participación de las mujeres matemáticas en nuestro país, nos plantearon por ejemplo un Congreso de Mujeres Matemáticas y diversas actividades relacionadas con género. La única actividad que la SMM realizaba dirigida a este tema en aquel momento era el “Apoyo Anual Sofía Kovalevakaia” el cual daremos más detalle adelante.

Por otro lado también recibimos preguntas y sugerencias acerca de apoyos a grupos “sub-representados” en nuestro país, por ejemplo, solicitudes de investigadores que trabajaban en comunidades marginadas en nuestro país en distintos estados y que requerían apoyos puntuales para realizar actividades de difusión y divulgación o de estudiantes destacados que por falta de recursos no podían terminar estudios, etc.

Por las razones anteriores y aprovechando una modificación de los estatutos que rigen la gobernabilidad de la Sociedad Matemática Mexicana decidimos crear la Comisión de Equidad y Género de la SMM, esta creación fue aprobada en el Congreso Nacional de 2013 y es a partir de entonces que trabajamos en actividades relacionadas con el Género y la Equidad en las Matemáticas en México las cuales se detallarán de manera puntual más adelante.

La Comisión ha sido coordinada desde su creación por la Dra. Gabriela Araujo Pardo, investigadora del Instituto de Matemáticas de la UNAM, e incluye como miembros a investigadores de diversas disciplinas relacionadas con el quehacer matemático; la Dra. Natalia García-Colín de INFOTEC Aguascalientes, el Dr. Ruben Martínez Avendaño de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, el Dr: León Olivé del Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM, la Dra. Sonia Ursini del Departamento de Matemáticas Educativas CINVESTAV y la Dra. Judith Zubieta de la Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia UNAM.

Para mayor información de la CEG de la SMM consultar: http://comisiondeequidadygenero.org/home https://www.facebook.com/comisionequidadSMM

Cabe destacar que las actividades realizadas por la comisión han sido fondeadas con contribuciones de la Fundación Sofía Kovalévskaia, la SMM, el proyecto CONACyT 196831, parte de la Convocatoria de Investigación en Género y Violencia 2014, del cual la Dra. Araujo funge como responsable y finalmente con fondos del Committee of Women of Mathematics (CWM) - International Mathematical Union (IMU), para mayor información sobre este Comité, su trabajo, miembros y convocatorias visitar la página:

http://www.mathunion.org/cwm

Figura 1: Fotografías del Primer Encuentro de Mujeres Matemáticas Mexicanas. Santiago de Querétaro, Querétaro. Enero 2014.

Además, todas las actividades realizadas a la fecha por esta comisión responden a sugerencias, solicitudes y propuestas planteadas por miembros de la comunidad matemática: estudiantes, profesores e investigadores.

Actividades organizadas por la CEG, en orden cronológico

Entrega de la Distinción Sofía Kovalévskaia

Es importante mencionar que la creación de este apoyo precede a la creación de la CEG y el impacto logrado en la comunidad a través de él es una de las principales razones que impulsaron a la SMM a formar la CEG.

La Distinción Sofía Kovalévskaia consiste en un apoyo financiero otorgado de forma conjunta entre la Fundación Sofía Kovalévskaia y la SMM a mujeres matemáticas jóvenes y talentosas próximas a doctorarse o que inician su carrera académica de forma individual. La distinción se ha otorgado durante los últimos once años a más de 100 estudiantes e investigadoras. En la mayoría de los casos el apoyo ha permitido a las premiadas realizar estancias en el extranjero o asistir a congresos especializados en sus áreas de investigación. En términos de impacto, cabe mencionar que entre las acreedoras a la

Figura 2: Fotografías de la decimoprimera entrega de la Distinción Sofía Kovalévskaia. Hermosillo, Sonora. Octubre 2015

distinción, el 95 % continúan desarrollando actividades de docencia e investigación, además de que varias de ellas han recibido otros premios importantes tales como el Reconocimiento "Sor Juana Inés de la Cruz" de la UNAM, la Beca para las Mujeres en la Ciencia L'Oreal/UNESCO/CONACyT/AMC, entre otros. Más aún, entre las premiadas hay mujeres que actualmente son líderes en la comunidad matemática, por ejemplo la Dra. Isabel Hubard es la actual delegada de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el Distrito Federal, las Dras. Dolores Lara y Eréndira Munguía organizan e imparten talleres sobre género y ciencia, la Dra. Gabriela Araujo fue fundadora y es la actual coordinadora de la CEG, por nombrar algunas.

Primer Encuentro de Mujeres Matemáticas Mexicanas (PEMMM)

A lo largo del año 2013, posterior a la creación de la CEG, se recibieron muchas sugerencias de realizar congresos de mujeres, principalmente con el propósito de discutir la problemática de género en la academia. A consecuencia, la CEG con el apoyo logístico y económico de la SMM organizó el PEMMM. Éste se realizó en el Centro Cultural Manuel Gómez Morín, de la ciudad de Santiago de Querétaro, Querétaro del 24 al 26 de enero del 2014 .

El objetivo del encuentro fue destacar la participación de las mujeres matemáticas en el desarrollo de investigación, educación y formación de recursos humanos en el ámbito nacional e internacional, con el propósito de mostrar a los (y las) investigadores(as) jóvenes y estudiantes de posgrado que es posible lograr una carrera exitosa como matemática en el país. Se invitaron a aproximadamente 15 expertas en diversas áreas de las matemáticas de variadas instituciones educativas del país; UNAM, UAM, CIMAT, CINVESTAV, etc, para impartir alrededor de 15 conferencias invitadas.

Además, a solicitud de varias estudiantes, se organizaron dos mesas redondas con los siguientes temas:

- Parejas Científicas. Sobre cómo varias parejas de científicos resuelven el problema de la compatibilidad de carreras y división de las tareas domésticas. item Problemática de Género en la Academia. Sobre las dificultades que han encontrado mujeres para establecer una carrera académica.

La conferencia tuvo una asistencia total de 112 participantes en sus tres días de duración. Los estudiantes e investigadores participantes también tuvieron la oportunidad de presentar su trabajo a través de una sesión de carteles.

Se pueden consultar los vídeos del evento en la pestaña de fotos y vídeos de la página:

http://comisiondeequidadygenero.org/home

Creemos que el impacto de este evento en la comunidad ha sido importante. Hemos notado que muchas mujeres investigadoras y docentes se han interesado en cultivar y nutrir en si mismas una conciencia de género. Sabemos que muchas de ellas han aprendido a reconocer las ocasiones en las que han sido y son discriminadas por su género y han obtenido el lenguaje para caracterizar y vocalizar dichas agresiones. Esto ha incidido en la consolidación de un grupo activo de mujeres matemáticas, algunas al inicio de sus carreras y otras consolidadas, interesadas en mejorar la situación de las mujeres en la profesión matemática.

Taller “Las mujeres podemos con las matemáticas”

Es bien conocido que las niñas tienen habilidades matemáticas comparables a la de los niños, sin embargo un predictor muy preciso de las diferencias de desempeño entre niñas y niños a nivel de educación básica es la prevalencia del estereotipo que los hombres son mejores en las ciencias exactas y las mujeres en las ciencias sociales (Hyde 2009, Kane 2012) Este hecho apunta a que mucho del talento femenino para la ciencia se deja de nutrir desde una edad temprana.

Con el propósito de destruir esta clase de estereotipos, la CEG creó este taller, dirigido a niñas y jóvenes estudiantes a nivel secundaria. Los talleres se elaboraron con el propósito de que las niñas y jóvenes se visualicen a sí mismas como potenciales científicas, así como para crear conciencia entre los estudiantes, padres y madres de familia y profesores sobre el papel de la mujer en la ciencia, en particular en las matemáticas.

Tanto el material como las sesiones de los talleres se realizaron bajo la dirección de Maria Eugenia Tamez, con la participación de la Dra. Dolores Lara y la Dra. Eréndira Munguía.

La primera ocurrencia del taller fue en el Colegio Maxei de la ciudad de Santiago de Querétaro en Enero del 2014 y un segundo taller se impartió en la secundaria pública número

Figura 3: Fotografías de los talleres “Las mujeres podemos con las matemáticas”. 2014

277 “Luis Gonzáles y Gonzáles” en la Ciudad de México en el mes de Mayo del 2014.

El taller consiste de dos sesiones. En la primera sesión se realiza la proyección de un video sobre mujeres matemáticas destacadas en la historia a los alumnos, seguida de una actividad didáctica matemática (que no depende del cálculo algebraico ni aritmético) que resalte en los alumnos que las habilidades matemáticas no dependen del género. Posteriormente se realiza una sesión de retroalimentación y reflexión sobre el video y la actividad. Finalmente se entrevista a los participantes con el fin de producir un segundo video con las conclusiones de los asistentes. En la segunda sesión se realizan las mismas actividades con padres, y madres de familia así como con los profesores del plantel.

Para este taller se creó material multimedia sobre mujeres matemáticas en la historia, el cual se encuentra a disposición del público en:

http://comisiondeequidadygenero.org/home

Los vídeos sobre las conclusiones del taller y las entrevistas a las estudiantes, profesoras e investigadoras se pueden consultar en el canal de YouTube de la CEG. (https://www.youtube.com/channel/UCqwDivbklX_k4uVo7OCnG5A).

Apoyo económico y promoción de la feria “Guelaguetza Matemática”

Los problemas que aquejan al estado de Oaxaca son muchos, por ejemplo, el nivel de escolaridad es el segundo más bajo entre las entidades del país, actualmente este es de 6.9 años contra 8.6 años del nivel nacional. Sin embargo, no son pocos los estudiantes y profesores dispuestos a superar las adversidades y aprender. Continuamente, en las labores de divulgación y la aplicación de exámenes de los diferentes concursos de matemáticas que se presentan a lo largo del año, los profesores de la Universidad del Papaloapan (UNPA) detectan estudiantes con resultados sobresalientes.

Por todo lo anterior, el Dr. Marcelino Ramírez de la UNPA realiza anualmente un curso para profesores y jóvenes de diferentes comunidades de todas las regiones del estado de

Oaxaca, en los que se haya detectado interés y gusto por las matemáticas.

Figura 4: Fotografías de la feria “Guelaguetza Matemática” realizada en la ciudad Oaxaca de Juárez, Oaxaca. Junio 2015

El curso tiene como objetivo mostrar a los docentes técnicas y recursos para mejorar su desempeño en el aula en el área de matemáticas, así como brindarles la preparación necesaria para desarrollar un tipo de matemáticas distinto al que se emplea usualmente, con problemas que despiertan el interés de los alumnos y les planteen un desafío intelectual. Además, se trabaja con estudiantes interesados en las matemáticas para desarrollar sus potencialidades, se promueve el trabajo en equipo y la integración de la comunidad a partir de la labor educativa, con el fin de contribuir al fortalecimiento de las matemáticas en las diferentes regiones del estado y a dar seguimiento al trabajo realizado con anterioridad.

La CEG apoyó económicamente los cursos celebrados en 2015 y 2016, dichos cursos se llevaron a cabo en la ciudad de Oaxaca de Juárez, Oaxaca. Se contó con la asistencia de alrededor de 40 estudiantes, y 40 profesores de niveles secundaria y bachillerato en cada uno de ellos.

Recomendaciones para la adecuada participación de grupos con baja representación en congresos de matemáticas

Es bien conocido que alrededor del mundo la participación de mujeres y otros grupos con baja representación en la matemática (y las ciencias exactas en general) es un problema importante a resolverse.

No hay duda que promover políticas de representación equitativa de todos los grupos participantes en la profesión matemática es nuestra responsabilidad ética, como miembros de dicha comunidad. La participación equitativa de todos los grupos en conferencias de matemáticas enriquece a la comunidad, pues promueve la inclusión de diversas voces y diferentes puntos de vista, además de contribuir a disolver estereotipos sobre el adecuado rendimiento y pertenencia de algunos grupos en la profesión (WISELI2, WISELI4, Surowiecki 2004).

La Comisión de Equidad y Género (CEG) de la SMM ve en la selección de comités científicos y organizadores, ponentes para conferencias magistrales, plenarias, por invitación y por solicitud una oportunidad para contribuir a la solución del problema de participación de grupos sub-representados. Creemos que promover la equidad en este respecto es importante, pues por ejemplo se argumenta que la presencia de mujeres en los comités científicos se correlaciona positivamente con el número de mujeres que son invitadas como conferencistas plenarias (Casadevall 2014), además de promover la presencia de modelos a seguir, la cual también ayuda a que los investigadores pertenecientes a éstos grupos que ya son integrantes de la comunidad matemática no vean sus carreras afectadas por su situación de invisibilidad (DiPrete 2006).

Con este fin emitimos un documento con el mismo título que esta sección, el cual desde febrero de 2016, fecha en la que la actual Junta Directiva, presidida por el Dr. Gelasio Salazar, está a la cabeza de la SMM, se reparte a los organizadores de cualquier congreso que sea apoyado económicamente con recursos de la SMM. El propósito del documento es crear conciencia entre la comunidad así como proveer un marco para tomar acciones concretas en pos de la resolución de este problema. En resumen, las recomendaciones son las siguientes:

La SMM observa cuatro grupos que son usualmente sub-representados en los comités científicos y organizadores, así como conferencistas magistrales, plenarios e invitados en congresos:

1. (M) mujeres,
2. (MIR) matemáticos que laboran en instituciones del interior de la república,
3. (MIP) matemáticos que no laboran en las principales instituciones del país (IPN, UAM, UNAM, CIMAT)
4. (MJ) matemáticos en la primera etapa de sus carreras.

Con base en un análisis simple de la base de datos más reciente (2015) de matemáticos inscritos en el SNI se solicita que los comités organizadores reflejen en la composición de sus congresos los siguientes porcentajes (como mínimo):

Grupo	%	Notas
1	M	19.16 Incluye a mujeres cuyo Nobilis es Dra. o Mtra.
2	MIR	57.71 Excluye adscripción Distrito Federal
3	MIP	50.70 Excluye adscripción CIMAT, IPN, UNAM, UAM
4	MJ	35 El porcentaje total de SNI I o C es 68 %. La cifra de 35 % pretende ser un estimado de los matemáticos al inicio de sus carreras que pertenecen al SNI.

Sabemos que, dependiendo del área de la matemática y el tipo de congreso, estos parámetros generales serán más o menos difíciles de alcanzar. Una de las razones que la mayoría de los organizadores ofrecen para justificar la inadecuada representación de dichos grupos es el desconocimiento de los participantes en las distintas áreas. Es por esto que también ponemos a disposición de la comunidad el padrón de matemáticos inscritos en el SNI en la siguiente liga.

Apoyos Terminales CEG-SMM 2015

Entre las actividades dirigidas a cerrar la brecha de representación de grupos discriminados en la profesión matemática la CEG convocó a estudiantes de licenciatura, maestría y doctorado a solicitar una beca de asistente del proyecto CONACyT 196831 de la Comisión de Equidad y Género de la SMM. Esta convocatoria está dirigida a mujeres, personas identificadas como indígenas y a personas pertenecientes a grupos con baja representación en las ciencias matemáticas, especialmente en provincia, que actualmente se encuentren realizando estudios de licenciatura o posgrado en alguna institución nacional.

El objetivo de estas becas es apoyar en la continuación y finalización de sus estudios a estudiantes de matemáticas de todos los niveles de educación superior en las ciencias matemáticas. Los estudiantes deben comprometerse a apoyar a la comisión de equidad y género de la SMM para la realización de diversas actividades que esta lleva a cabo.

La convocatoria 2015 ha sido cerrada. Se recibieron más de 60 solicitudes de 18 estados de la república y se seleccionaron a 12 estudiantes, 10 mujeres y 2 hombres, representantes de todos los niveles; licenciatura, maestría y doctorado. Cada uno de los estudiantes recibirá un apoyo de entre dos mil y dos mil quinientos pesos mensuales por cuatro meses. Los fondos pueden ser destinados a cubrir gastos por los conceptos de viáticos, tramites de titulación, impresión de tesis, entre otros.

Taller: El género variable invisible

Una de las observaciones de la CEG en respecto a las principales barreras a la que nos enfrentamos en promover el tema del "género en las matemáticas" es la ausencia de una "cultura de género" entre la comunidad matemática. Más preocupante aún es la ausencia de consciencia de género entre las mujeres de nuestra comunidad. A consecuencia, muchas de ellas han sido incapaces de identificar las ocurrencias de actitudes discriminatorias a lo largo de sus carreras, lo cual incide en la ausencia de apoyo para promover políticas que permitan la denuncia, el castigo y eventual erradicación de dichas actitudes discriminatorias.

Es por esto que la CEG fondeó la creación de este taller, con el propósito de brindar a las investigadoras un espacio informativo y de discusión sobre las diferencias, entre género y sexo. En el taller se incluye la proyección de videos educativos y ejercicios de reflexión con la finalidad de que las investigadoras, maestras y estudiantes puedan identificar situaciones en las que se han visto acosadas o discriminadas. También se trata de mostrar a las investigadoras el lenguaje que les permita vocalizar aquellas actitudes discriminatorias que han experimentado.

El taller fue creado por María Eugenia Tamez y la Dra. Dolores Lara, su duración es de aproximadamente cuatro horas, y está dirigido a investigadoras, profesoras, y estudiantes de matemáticas y carreras afines de todos los niveles. El taller se diseñó de manera que todos los materiales puedan ser usados por otras investigadoras interesadas para reproducirlo en su propia institución.

La primera y segunda ocurrencia de este taller fue en el Instituto de Matemáticas de la UNAM Campus DF, en dos días consecutivos. Contamos con la presencia de 30 mujeres cada uno de los días. El taller fue abierto a todas las mujeres interesadas en el área Metropolitana de la Ciudad de México y promovido a través de la página de Facebook de la CEG. Contamos con la presencia de estudiantes e investigadoras de la UAM, UNAM, CINVESTAV y algunas profesoras de matemáticas de escuelas del Distrito Federal. Recibimos muy buena retroalimentación en respecto a los contenidos y dinámicas del taller, además de peticiones para llevarlo directamente a escuelas de nivel medio superior.

La investigadora Eréndira Munguía ya ha reproducido el taller, invitando profesoras, investigadoras y estudiantes de la UNPA Campus Loma Bonita.

Este taller se ha impartido también en las dos sedes foráneas del Instituto de Matemáticas: Sede Cuernavaca, dirigido por la Dra. Eréndira Mungia y la Dra. Fuensanta Aroca y en la Sede Juriquilla dirigido por María Eugenia Tamés.

Mesa Redonda: "Si no es ahora, ¿cuándo?: Perspectivas y acciones rumbo a la inclusión equitativa de grupos sub-representados en la profesión matemática"

En el marco del XLVIII Congreso de la SMM, la CEG organizó una mesa redonda con el propósito de consultar a la comunidad y a un grupo de panelistas involucrados en la organización y participación en eventos en pro de la equidad, sobre acciones concretas que la CEG pueda impulsar en el futuro. Los participantes en este panel fueron:

- Dra. Ann Hibner Koblitz. Investigadora especialista en Estudios de la Mujer y Género de la Escuela de Transformación Social de la Universidad del Estado de Arizona.
- Dra. Dania Gutiérrez. Investigadora del CINVESTAV Monterrey. Su área de especialidad es la Bioinformática y está interesada en asuntos de diversidad en la ciencia, participando en varios foros donde se discute la experiencia de la comunidad LGBT en la academia.
- Dra. Gisela Montiel Espinoza. Investigadora CINVESTAV Distrito Federal, especialista en Construcción social de conocimiento matemático.
- Dr. Jorge Xicoténcatl Velasco Hernández. Investigador el Instituto de Matemáticas de la UNAM Campus Juriquilla y Presidente actual de la Sociedad Matemática Mexicana.

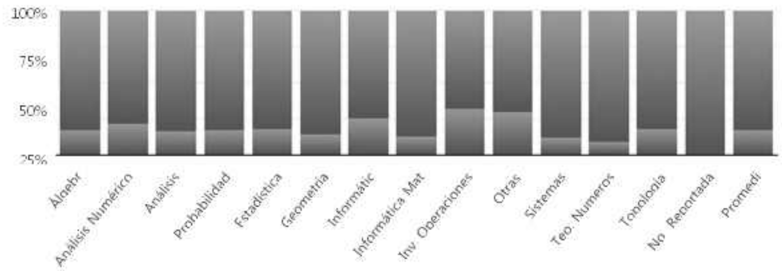

Figura 5: Porcentaje de participación de mujeres (azul) vs. hombres (verde), por disciplina. SNI 2015.

- Dr. Marcelino Ramírez Ibáñez. Investigador de la UNPA Campus Loma Bonita, Oaxaca. Organizador de la feria Guelaguetza Matemática y Delegado de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para el estado de Oaxaca.

A pesar de que la mesa se planeó con el propósito de discutir planteamientos que permitan la inclusión de varios grupos sub-representados, la mayoría de las propuestas se hicieron en torno a la resolución del problema de la igualdad de género con un enfoque transversal. Pues, correctamente, cada investigador ha observado desde su zona de acción, que si un grupo es discriminado, un miembro del sexo femenino del grupo es entonces doblemente discriminado.

Las propuestas que presentamos al final del documento son en gran medida inspiradas por las discusiones sostenidas en esta mesa.

Participación y organización de foros y reuniones académicas conjuntas, nacionales e internacionales, donde se traten temas sobre género y discriminación

Una de las funciones principales de la CEG es vincularse con otras organizaciones nacionales e internacionales de mujeres en la ciencia. Creemos firmemente que las acciones y políticas impulsadas en conjunto serán las formadoras de un futuro donde las mujeres y los hombres cuenten con el mismo nivel de oportunidad de integración a la academia y apreciación de su trabajo científico. Durante los últimos cuatro años hemos participado en los siguientes foros:

- Asistencia al International Congress of Women Mathematicians. Seul, Corea 2014
- Asistencia al Primer Coloquio Iberoamericano. Diálogos de saberes y políticas de Ciencia, Tecnología e Innovación con perspectiva de género. Cuernavaca, México 2015
- Asistencia al taller “Superando la Inequidad: Acciones para Impulsar y Reconocer las Investigaciones de Ciencia y Género en México” convocado por el Foro Consultivo Científico y Tecnológicos (FCCyT), El Grupo Mujer y Ciencia de la Universidad Nacional Autónoma de México (GMC-UNAM), la Red de Académicas de la Universidad Autónoma Metropolitana y la Federación Mexicana de Universitarias (FEMU), con el apoyo del CONACyT. Distrito Federal, México 2015
- Asistencia al “Encontro Paulista de Mulheres na Matemática” que se llevó a cabo en la Universidad de Campinas, Brasil el 8 de marzo del 2016.
- Asistencia al Panel “Women Mathematics in Latin America” que se llevó a cabo durante el “Fifth Latin American Congress of Mathematics” en Colombia en julio de 2016.
- Participación en el Gender Summit 2016, que se llevó a cabo en abril del 2016 en la Ciudad de México y que es un evento internacional organizado en esta ocasión por CONACyT y en el que participan científicas sociales dedicadas a estudios de género en la ciencia, la innovación y la tecnología. La CEG participó con un póster en dicho evento. Para mayor información del evento visitar:

  http://gendersummit8.com/
- Participación en la Mesa Redonda sobre género que se llevó a cabo en la 3era Reunión de Matemáticos Mexicanos en el mundo en el CIMAT, Guanajuato en agosto del 2016.

- Organización del Taller “Women in Mathematics en Latin America: Barriers, Advancements and New Perspectives” que se llevó a cabo en la Casa Matemática Oaxaca (CMO) en agosto del 2016. Desde mi punto de vista es uno de los eventos más importantes que ha organizado la CEG en colaboración de la Academia de Ciencias en Cuba y la Fundación Sofía Kovalevskaia. El evento conto con 8 conferencias plenarias y alrededor de 30 conferencias invitadas y participaron alrededor de 50 mujeres matemáticas en Latinoamérica y el Caribe. Todos los talleres que se llevan a cabo en el CMO son evaluados por un Comité Especial para ser aceptados y tienen un cupo limitado. En este evento se creó la Red de Mujeres Matemáticas de Latinoamérica y el Caribe. Los invitamos a visitar la página del evento:

  http://www.birs.ca/events/2016/5-day-workshops/16w5003

  Y muy pronto contaremos con las memorias del mismo en un video que estará en las diversas páginas de la Comisión y en youtube.

- Participación en el evento “Mujeres a la Ciencia” que se llevó a cabo en La Paz, Baja California, en septiembre de 2016. Este evento fue organizado por el Consejo Subcaliforniano de Ciencia y Tecnología (COSCyT) y fue un desayuno en donde estuvieron invitadas las científicas de Baja California Sur y la CEG impartió dos pláticas, una de matemáticas aplicadas y otra del trabajo de la CEG desde su fundación, después se abrió el panel para preguntas y sugerencias.

Actividades futuras:

◇ Del 22 al 24 de noviembre del 2017 la Dra. Araujo asistirá al Taller “Gender Gap in Science: A Global Approach to the Gender Gap in Mathematical and Natural Sciences: How to Measure It, How to Reduce It?” organizado por el International Council of Science y en el cual se aborda la problemática de la brecha de género en la ciencia en general y se promueven distintas acciones para lograr la equidad de género en la ciencia.

◇ Del 22 al 26 de enero del 2018 se llevará a cabo el II Encuentro de Mujeres Matemáticas en Latinoamérica en Valdivia, Chile.

http://rsu.usach.cl/actividades/ii-encuentro-de-mujeres-matematicas-de-america-latina

◇ Probablemente en abril del 2018 se llevará a cabo el II Encuentro de Mujeres Matemáticas Mexicanas en San Luis Potosí, cuyo comité organizador está conformado por Dolores Lara del CINVESTAV, Rubén Martínez-Avendaño de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y María del Carmen Rodríguez de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

◇ Finalmente, está en proceso de organización un panel sobre género y equidad en Matemáticas organizado con la Comisión de Equidad y Género de la Sociedad Matemática Colombiana dentro del Encuentro de Sociedades Matemáticas de Colombia y México que tendrá lugar en Barranquilla, Colombia en junio de 2018.

Informe de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2016

Rogelio Valdez Delgado
Presidente de la OMM

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) es un Programa de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM), creado e impulsado desde 1987. Después de 30 años, el Concurso Nacional se ha convertido en la competencia anual de matemáticas para estudiantes preuniversitarios más importante y prestigiosa en nuestro país. Uno de los principales objetivos del Programa de la OMM es promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes participantes; alejándose del enfoque tradicional que promueve la memorización y mecanización.

La actividad más importante que organizamos es el Concurso Nacional de la OMM. En noviembre pasado se celebró en Acapulco, Guerrero la edición número 30, donde asistieron 192 alumnos que representaron a los 32 estados de México. El éxito de este evento, se debe al trabajo que se realiza en cada Estado de la república durante los primeros 9 meses del año.

Los ganadores reciben entrenamientos durante 6 meses, y los mejores alumnos representan a México en las diferentes olimpiadas internacionales en las que se participa. El grupo de profesores que imparte los entrenamientos, es pieza fundamental para el movimiento olímpico, su trabajo es altruista y de varias demandantes horas, la mayoría de ellos son ex olímpicos y tienen bastante compromiso con la OMM.

El Coordinador General de los Entrenamientos es Marco Antonio Figueroa, el trabajo se divide en 4 áreas que son y tienen por responsables a: Álgebra, José Antonio Gómez Ortega; Combinatoria, David Torres; Geometría, Luis Eduardo García y Teoría de Números, Julio César Díaz Calderón. El responsable de la IMC es Hugo Villanueva Méndez

Actividades Académicas del 2016

1. México es sede de la Asian Pacific Mathematical Olympiad (APMO) por los siguientes tres años.
2. Se re-imprimieron 5 títulos de los Cuadernos de Olimpiadas
3. Se siguió con el trabajo de la revista Tzaloa y del folleto introductorio.
4. El comité nacional envío a los Estados tres exámenes para el uso en sus procesos selectivos.
5. Se organizó el curso de Entrenadores, en Pachuca Hidalgo.
6. Se confirmó un entrenamiento conjunto con Canadá en el BIRS Oaxaca, previo a la IMO en Brasil, en julio del 2017.
7. Se organizaron 4 Concursos Regionales, como preparación de los Estados rumbo al Concurso Regional.
8. La actuación de nuestras delegaciones en los concursos en los que participamos durante el 2016 fueron:

RMM (Romanian Master of Mathematics)
En febrero se llevó a cabo la 8^{a} edición del concurso Romanian Master in Mathematics. México asistió por segunda vez y se obtuvieron una medalla de plata, tres de bronce y una mención honorífica. México ocupó el lugar 10 de 20 países.

APMO (Asian Pacific Mathematical Olympiad)
En la 28^{α} Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, la delegación de México (con sus 10 mejores alumnos), obtuvo una medalla de oro, una medalla de plata, cinco medallas de bronce y tres menciones honoríficas. Por países se logró el décimo cuarto lugar de entre los 36 países participantes.

EGMO (European Girls Mathematical Olympiad)
En abril pasado, se asistió a Busteni, Rumania, a la 5ta EGMO, compitieron 39 países, 30 países europeos y 9 países invitados. Quedamos en el lugar 13, obteniendo una medalla de oro y una medalla de plata.

IMC (International Mathematics Competition)
La Competencia Internacional de Matemáticas (IMC por sus siglas en inglés), es un concurso para alumnos de secundaria. En el 2016 se realizó la décimo séptima edición en Chiang Mai, Tailandia. Participaron cerca de 600 alumnos distribuidos en más de 60 equipos provenientes de 29 países, principalmente asiáticos. México participó con dos equipos, de 4 alumnos cada uno. En la competencia individual se obtuvieron dos medallas de bronce y 4 menciones honoríficas. En la prueba por equipos, los dos equipos obtuvieron medalla de bronce.

OMCC (Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe)
En junio se celebró en Kingston, Jamaica la décimo octava Olimpiada de Matemáticas de Centroamérica y el Caribe, participaron 13 países. México obtuvo una medalla de oro, y dos medallas de plata. México quedo en primer lugar.

IMO (International Mathematical Olympiad)
La 57a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO por sus siglas en inglés) se realizó en Hong Kong, el pasado julio. La IMO, es la más prestigiosa de las competencias de matemáticas. México obtuvo 4 medallas de plata, 1 de bronce y una mención honorífica. Como equipo se logró una participación destacada, quedando en lugar 23 de entre 109 países participantes, su tercer mejor lugar histórico.

IGO (Iranian Geometry Olympiad)
La Olimpiada Iraní de Geometría (IGO, por sus siglas en inglés) es una compe-tencia a distancia que organiza Irán. Este año se realizó por tercer año, el día 9 de septiembre, México fue invitado a participar por segunda ocasión. Hay tres niveles: 1) elemental, que corresponde a alumnos de primero y segundo de secundaria, 2) medio, para alumnos de tercero de secundaria y primero de ba-chillerato y 3) avanzado, para alumnos de segundo y tercero de bachillerato. Es muy abierta la competencia, pero solamente se toman en cuenta los mejores 4 alumnos de cada nivel. México obtuvó 1 medalla de plata y 10 medallas de bronce. Participaron 31 países, México quedo en sexto lugar.

OIM (Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas)
En la pasada XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, realizada el pasado mes de septiembre en Antofagasta, Chile, México obtuvo tres medallas de plata y una medalla de bronce. México quedó en cuarto lugar de entre los 22 países participantes.

En resumen, las Delegaciones de México en los concursos del año 2016 obtuvieron **3 medallas de oro, 13 medallas de plata, 24 medallas de bronce y 9 menciones honoríficas. De los 53 alumnos que participaron en las olimpiadas internacionales del año, 49 obtuvieron algún premio**.

Actividades de Difusión del 2016

1. Se tiene ya un convenio entre la SMM y el Instituto de Matemáticas de la UNAM, para la publicación de los Cuadernos de Olimpiadas.
2. Se ha aumentado considerablemente la difusión de las actividades y resultados de la OMM, en la prensa escrita y digital. Nuestros alumnos han recibidos varias invitaciones a entrevistas de radio y televisión.
3. Cada mes se elabora un boletín con las actividades del mes, el cual se envía a todos los Estados.
4. Se tienen varios alumnos ex-olímpicos becados por diferentes instituciones.
5. La OMM participó en el foro de consulta sobre contenidos curriculares de Educación Media Superior. Esta participación fue gracias a la invitación de la SEP a través de la SMM.

Organización del 2016

1. Del 6 al 11 de noviembre se llevó a cabo el 30 Concurso Nacional de la OMM, en Acapulco Guerrero.

2. Durante el Congreso nacional de la SMM en la ciudad de Aguascalientes, se llevó a cabo un sesión especial de los 30 años de la OMM.
3. Del 18 al 20 de marzo se llevó a cabo el Curso de Entrenadores, en el CEUNI, en Pachuca Hidalgo, con la participación de alrededor de 40 personas, el tema fue Geometría.
4. Se tienen y se han tenido apoyos durante el año, del Instituto de Matemáticas de la UNAM, CONACYT, SMM, SEP, UNETE.
5. Nuevo comité editorial de los Cuadernos de Olimpiadas.
6. Se formalizó un convenio de colaboración entre COPOCYT (Consejo Poto-sino de Ciencia y Tecnología) y la OMM. La OMM tendrá presencia, por me-dio de este proyecto, en todas las escuelas Primarias del Estado de San Luis Potosí, a nivel 5to año de primaria.

Estados

1. Un total de 31 Estados del país emitieron convocatorias para sus procesos estatales, con excepción de Baja California Sur.

2. La OMM apoyo a los Estados de Chiapas, Quintana Roo, Oaxaca, Durango, Coahuila, Sinaloa, Baja California Sur, Ciudad de México, Nuevo León, Chihuahua y Morelos, para la realización de entrenamientos intensivos.

MATEMÁTICAS

Informe del 49° Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 2016

Brenda Tapia Santos
Coordinadora General del Congreso

La edición 49 del Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana se llevó a cabo del 23 al 28 de octubre, teniendo como sede el Plantel Norte de la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

Los 1160 asistentes tuvieron acceso a un total de 798 actividades programadas, de las cuales, 9 fueron conferencias plenarias:

- Graciela González Farías, Algunos aspectos históricos de la Persistencia en series temporales.
- Luis Briseño Aguirre, ¿Cómo iniciar un curso de Cálculo?
- José Antonio Vallejo Rodríguez, Un paseo por las Matemáticas (y la Física) de la mano de Poisson y Dirac.
- Rita Jiménez Rolland, Simetrías y patrones en álgebra y topología.
- Enrique de Alba Guerra, Las Matemáticas en el INEGI.
- Miguel Ángel Pizaña López, Construyendo máquinas en universos discretos.
- Martha Takane, El nuevo auge del álgebra lineal.
- Mónica Moreno Rocha, El tejido invisible de la dinámica compleja.
- Jacob Mostovoy, La fórmula de Taylor como magia universal.

Hubo un total de 556 ponencias distribuidas en 22 áreas temáticas; 90 ponencias conformaron las 13 sesiones especiales desarrolladas en la sede (2 sesiones locales, 7 por solicitud y 4 ordinarias); se realizaron 15 cursos y talleres de Docencia y, 120 trabajos fueron considerados para presentarse en modalidad cartel, distribuidos en 4 sesiones.

Además de las actividades anteriores, se realizaron algunas fuera de la sede gracias a la gestión del Comité Local con el Municipio de Aguascalientes y con algunas escuelas Secundarias y Bachilleratos. Para la Sesión Especial Ordinaria "De joven a joven" se contó con la participaron de las siguientes escuelas:

- Centro de Estudios de Bachillerato 5/1 "Lic. Jesús Reyes Heroles",
- Bachillerato UAA-Oriente,
- Bachillerato UAA-Centro,
- CBStis 6/1 "Aguascalientes",
- Bachillerato de Universidad Cuauhtémoc Aguascalientes.

La sesión extraordinaria "Matemáticas en la calle" se llevó a cabo en la explanada del Templo de San Marcos con una participación aproximada de 100 personas de todas las edades. Como resultado de esta actividad, algunas escuelas solicitaron la impartición de talleres que, en su totalidad, dieron atención a cerca de 1150 estudiantes de nivel secundaria de las siguientes instituciones:

- Escuela Secundaria General #2
- Centro de Educación Media de la UAA Plantel Central
- Centro de Educación Media de la UAA Plantel Oriente
- Escuela Secundaria Técnica # 1

Finalmente, la presencia del "Museo Interactivo e Itinerante de Matemáticas de Zacatecas (MIIMAZ)" en las instalaciones de la UAA, hizo posible que 850 estudiantes de nivel primaria, secundaria y bachillerato recibieran talleres lúdicos matemáticos.

Creemos que este 49 Congreso de la SMM logró el objetivo de congregar a investigadores tanto nacionales como internacionales, así como docentes y estudiantes de 92 instituciones y, en particular, impactó en todos los niveles educativos del Estado de Aguascalientes. Agradecemos a los asistentes por participar, a los expositores y a los Comités Central y Local por la organización de esta edición.

Atentamente.
Dra. Brenda Tapia Santos
Coordinadora General.


UNIVERSIDAD AUTONOMA
uaa
uaa

AVISOS

CONACYT
Proyecto Apoyado por CONACYT

CARTA INFORMATIVA DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA, Número 76, Mayo-Octubre 2016, es una publicación semestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, No. Ext. s/n, Col. San Andrés Totoltepec, C.P. 14400, Delegación Tlalpan, Distrito Federal, Tel. 58496709, http://www.smm.org.mx, smm@smm.org.mx. Editor responsable: Edgar Possani Espinosa. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-090614102900-106, ISSN: 2007-7122, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, Licitud de Título y contenido No. 16036, otorgado por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación. Permiso SEPOMEX EN TRÁMITE. Impresa por Diseño 69 (Diseño-Impresión-Publicidad), Razón Social: Gema Franco Benavides, Juan Antonio Mateos No. 154-A, Colonia: Obrera, Delegación Cuauhtémoc, CP: 06800, CDMX, este número se terminó de imprimir el 15 de diciembre del 2017 con un tiraje de 500 ejemplares.

CARTA INFORMATIVA
DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Número 76,
Mayo 2016
Octubre 2016
Publicación de la
Sociedad Matemática Mexicana, A. C.
Apartado Postal 70-450,
04510 México, D. F.
Tel. +52 (55) 5849-6710 y 19
smm@smm.org.mx

IMPRESIÓN

Diseño 69 (Diseño-Impresión-Publicidad). 5740-2223, 5085-5676.
cotizador-diseno69@outlook.com

PORTADA

49 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana